DOCUMENT RESUME

ED 186 218 SE 030 430

AUTHOR	Beatty, Leslie; And Others
TITLE	Matematicas Para La Escuela Primaria, Grado 4 (Parte 2), Comentario. Traduccion Preliminar de la Edicion en Ingles Revisada. (Mathematics for the Elementary School, Grade 4, Part 2, Teacher's Commentary. Preliminary Translation of the Revised English Edition).
INSTITUTION	Stanford Univ., Calif. School Mathematics Study Group.
SPONS AGENCY	National Science Foundation, Washington, D.C.
PUB DATE	67
NOTE	458p.; For related document in Spanish, see SE 030 429.
LANGUAGE	Spanish
EDRS PRICE	MF01/PC19 Plus Postage.
DESCRIPTORS	*Arithmetic; *Bilingual Education; Elementary Education; *Elementary School Mathematics; Geometry; Grade 4; Instructional Materials; *Mathematics Curriculum; Mathematics Instruction; *Teaching Guides
IDENTIFIERS	*School Mathematics Study Group

ABSTRACT

This is Part 2 of the teacher's commentary for the grade 4 mathematics program. Part 2 includes the commentary for chapters 6 through 10. Topics covered include addition and subtraction, multiplication and division, geometrical figures, lines and lineal measurement, and fractions. (RH)

****
* Reproductions supplied by EDRS are the best that can be made *
* from the original document. *
****

ED136218

SCHOOL
MATHEMATICS
STUDY GROUP

MATEMATICAS PARA LA ESCUELA PRIMARIA

Grado 4 (Parte 2)

Comentario

(Traducción preliminar de la edición en inglés revisada)

U S DEPARTMENT OF HEALTH, EDUCATION & WELFARE
NATIONAL INSTITUTE OF EDUCATION

THIS DOCUMENT HAS BEEN REPRODUCED EXACTLY AS RECEIVED FROM THE PERSON OR ORGANIZATION ORIGINATING IT. POINTS OF VIEW OR OPINIONS STATED DO NOT NECESSARILY REPRESENT OFFICIAL NATIONAL INSTITUTE OF EDUCATION POSITION OR POLICY

"PERMISSION TO REPRODUCE THIS MATERIAL HAS BEEN GRANTED BY
Mary L. Charles of the NSF
TO THE EDUCATIONAL RESOURCES INFORMATION CENTER (ERIC)."

SE 030 430

MATEMATICAS PARA LA ESCUELA PRIMARIA

Grado 4 (Parte 2)

Comentario

(Traducción preliminar de la edición en inglés revisada)

Texto preparado bajo la supervisión del Comité para la matemática de la escuela primaria del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar:

Leslie Beatty	Distrito escolar de Chula Vista Chula Vista, California
E. Glenadine Gibb	Colegio para Maestros del Estado de Iowa, Cedar Falls, Iowa
W.T. Guy	Universidad de Texas
S.B. Jackson	Universidad de Maryland
Irene Sauble	Escuelas públicas de Detroit
M.H. Stone	Universidad de Chicago
J.F. Weaver	Universidad de Boston
R.L. Wilder	Universidad de Michigan

© 1967 by The Board of Trustees of the Leland Stanford Junior University
All rights reserved
Printed in the United States of America

Permission to make verbatim use of material in this book must be secured from the Director of SMSG. Such permission will be granted except in unusual circumstances. Publications incorporating SMSG materials must include both an acknowledgment of the SMSG copyright (Yale University or Stanford University, as the case may be) and a disclaimer of SMSG endorsement. Exclusive license will not be granted save in exceptional circumstances, and then only by specific action of the Advisory Board of SMSG.

Financial support for the School Mathematics Study Group has been provided by the National Science Foundation.

Proyecto de Traducción al Español

Comisión Consultiva

Edward G. Begle, Universidad de Stánford

Howard F. Fehr, Universidad de Columbia

Mariano García, Universidad de Puerto Rico

Max Kramer, San Jose State College

TABLA DE MATERIAS

Capítulo	Comentario para el maestro	Texto del estudiante
6. PROPIEDADES Y TECNICAS DE LA ADICIÓN Y SUSTRACCION II .	503	
Propósito de la unidad . . .	503	
Base matemática	504	
Enseñanza de la unidad . . .	508	
Nombres diferentes para el mismo número	508,510	297
Repaso de la adición . . .	512,516	299
Más sobre la adición . . .	517,520	300
Otro método para sumar . .	522,523	302
Repaso de la sustracción .	528,531	307
Más sobre la sustracción .	532,535	308
Otro método para restar .	537,540	310
Sustracción con ceros . .	543	313
Relación de las técnicas de la adición y la sustracción	545,548	315
El lenguaje de los problemas de sustracción .	552,555	319
Razonamiento en la forma si-entonces	557,558	321
Repaso	561,563	324
Amplicación	569,571	330
7. TECNICAS DE LA MULTIPLICACION Y LA DIVISION	575	
Propósito de la unidad . . .	575	
Base matemática	576	
Enseñanza de la unidad . . .	585	
Repaso de la multiplicación y la división--Operaciones	585,587	334
Multiplicación por múltiplos de diez	592,594	339
Multiplicación por múltiplos de cien	597,599	342

Capítulo		Comentario para el maestro	Texto del estudiante
	Más información acerca de cómo multiplicar . .	602,606	345
	Multiplicación de números más grandes	609,611	348
	Un método más corto de multiplicar	615,617	352
	Multiplicación de números menores que 100 por múltiplos de 10	620,623	355
	Determinación de productos de dos números cualesquiera mayores que 10 (y menores que 100) . .	626,630	358
	Uso de la multiplicación para resolver problemas en forma de cuento . . .	636,637	364
	Determinación de factores desconocidos	640,645	367
	Una manera de dividir dos números	651,654	373
	Más información acerca de la división de dos números	656,658	375
	Uso de la división para resolver problemas en forma de cuento	660,662	377
	Más práctica en la división de números	666,670	381
	Determinación de cocientes y residuos	674,678	385
	Repaso y ampliación . . .	681,685	388
	Ejercicios de práctica . .	688	391
	Repaso	692	395
8.	CARACTERIZACION DE FIGURAS GEOMETRICAS CORRIENTES	707	
	Propósito de la unidad . . .	707	
	Base matemática	708	
	Enseñanza de la unidad . . .	716	
	Repaso del triángulo y el cuadrilátero	716.718	410
	Comparación de segmentos de recta	722,724	414

Capítulo		Comentario para el maestro	Texto del estudiante
	Triángulos isósceles y equiláteros	728,730	418
	Ángulos rectos	733,734	421
	Rectángulos y cuadrados	739,740	426
	Superficies	743,761	429
	Prisma rectangular . . .	744,763	431
	Prisma triangular . . .	747,767	435
	Pirámide	748,771	439
	Cilindro	751,773	441
	Cono	754,777	445
	Superficie esférica . .	756,779	447
	Cubo	758	
	Tetraedro	759	
	Aristas y caras	781	449
9.	MEDICION LINEAL	783	
	Propósito de la unidad . . .	783	
	Base matemática	784	
	Enseñanza de la unidad . . .	797	
	Comparación de tamaños . .	798,800	451
	Comparación de tamaños sin contar	802	453
	Uso de un compás para comparar segmentos . . .	808	459
	Medición de segmentos . .	810,811	461
	Uso de un compás para medir segmentos rectilíneos	813	463
	Medición con la aproximación de una unidad . . .	815	465
	Uso de unidades normalizadas de longitud . . .	818,820	468
	Escalas de medidas	826,827	474
	Uso de escalas lineales de medida	831	
	La escala en pulgadas y la escala en centímetros .	832	478
	Otras unidades normalizadas	836,837	482
	Combinación de longitudes	842	487
	Perímetro	849,850	494

Capítulo		Comentario para el maestro	Texto del estudiante
	Perímetros de polígonos .	855	499
	Determinación de perímetros	859	503
10.	EL CONCEPTO DE NUMERO RACIONAL	863	
	Propósito de la unidad . . .	863	
	Una nota para el maestro . .	864	
	Base matemática	865	
	Materiales	879	
	Enseñanza de la unidad . . .	885	
	La idea de número racional	885,889	506
	Una nueva clase de números	893,894	510
	Números racionales mayores que uno	902,905	518
	Nombres diferentes para el mismo número	911,913	524
	Ordenación de los números racionales	923,924	534
	Una nueva clase de nombres	930,932	540
	Uso de los números racionales	938,939	546
	Ejercicios de práctica . .	945	552
	Repaso	949	556

Capítulo 6

PROPIEDADES Y TECNICAS DE LA ADICION Y LA SUSTRACCION II

PROPOSITO DE LA UNIDAD

1. Ayudar a los estudiantes a comprender las técnicas para sumar y restar números con numerales de varios dígitos, haciéndoles entender cómo esas técnicas dependen de las propiedades de nuestro sistema de numeración, y de las propiedades conmutativa y asociativa de la adición.
2. Ayudar a los estudiantes a darse cuenta de que si conocen las combinaciones básicas de la adición y las propiedades de la adición y la sustracción, pueden sumar y restar números cuyos numerales contengan varios dígitos.
3. Ayudar a los estudiantes a lograr destreza en la adición y la sustracción, lo mismo que en la comprobación de los resultados de dichas operaciones.
4. Ayudar a los estudiantes a perfeccionar su habilidad para resolver problemas mediante el empleo de enunciados matemáticos en casos que requieren la adición y la sustracción de números cuyos numerales tienen varios dígitos, dando preferencia a aprender a decidir cuándo se debe emplear la sustracción.

Los alumnos que ya hayan aprendido a emplear perfectamente las técnicas de la adición y la sustracción podrán completar rápidamente la primera mitad de esta unidad. Otros alumnos deberán estudiarla con más detenimiento. Sin embargo, la explicación de los conceptos fundamentales que se emplean en las técnicas es importante y no debe descuidarse con ningún grupo. Por el contrario, debe dársele preferencia. La explicación de esos conceptos y el desarrollo de la habilidad para resolver problemas son los objetivos principales de esta unidad.

BASE MATEMATICA

La respuesta a la pregunta: "¿Cuál es la suma de 5 y 2?", es 5 + 2. Generalmente, se considera que la pregunta significa: "¿Cuál es el numeral decimal de la suma de 5 y 2?" Para esta pregunta, la respuesta es 7. Análogamente, la respuesta a: "¿Qué número hay que sumar a 4 para que la suma sea 7?", es 7 - 4. Expresado como un numeral decimal, 7 - 4 es 3.

La expresión 892 + 367 es una respuesta correcta a la pregunta: "¿Cuál es la suma de 892 y 367?", pero, generalmente, no es la más conveniente. Se espera que se dé como respuesta el numeral decimal 1,259. Luego, al aprender el proceso de la adición, un objetivo importante es escribir una suma como 892 + 367 en la forma de un numeral decimal.

Si los números que se suman son 42 y 37, el resultado es 7 decenas y 9 unidades. Esta suma puede escribirse directamente como 79. Sin embargo, si los números son 67 y 58 y la operación que ha de efectuarse es la adición, el resultado es 11 decenas y 15 unidades. Esta suma no puede escribirse directamente como un numeral decimal; debe considerarse como 1 centena, 2 decenas y 5 unidades. Entonces, se escribe como 125.

Análogamente, cuando se efectúa la operación de división con números cuyos numerales tienen más de un dígito, el designar mediante un numeral decimal el número que representa la suma exige a menudo mayor atención. Si 49 y 23 son los números con los cuales se va a efectuar la operación, el sumando desconocido es 2 decenas y 6 unidades. Este resultado puede escribirse directamente como 26. Sin embargo, si los números con que se va a efectuar la operación son 32 y 17, el 32 deberá considerarse como 2 decenas y 12 unidades. Esto hace más fácil restar 1 decena y 7 unidades. El resultado 1 decena y 5 unidades, se escribe, ahora, como 15.

A la consideración de 32 como 3 decenas y 2 unidades o como 2 decenas y 12 unidades se le ha llamado "dar otro nombre a 32". La idea de dar otro nombre a un número, es decir,

de representarlo de otra manera, se ha utilizado ampliamiente en algunas de las unidades anteriores. Es fácil comprender que hay una infinidad de maneras de representar un mismo número. Por ejemplo, el número 8 puede representarse con la expresión m - n donde n puede ser un número arbitrario y m = n + 8. En esta unidad en particular, nos interesa casi exclusivamente una manera de representar números que es muy útil para sumar y restar números grandes.

Esta manera de representar números no se designa con ninguna palabra o frase en esta unidad. En lugar de esto, se utilizarán expresiones como las siguientes:

"523 puede considerarse como 500 + 20 + 3", o

"Otro nombre de 523 es 500 + 20 + 3", o

"523 puede expresarse como 500 + 20 + 3".

Al mismo tiempo, la idea de nombres diferentes del mismo número es fundamental para aprender el proceso de la adición y la sustracción. Los alumnos deben comprender esta idea, si van a calcular sumas y sumandos, desconocidos, dándose bien cuenta de lo que están haciendo.

Consideremos el siguiente ejemplo que muestra la necesidad de aprender a expresar un número de varias maneras y su utilización eficaz al efectuar las operaciones de adición y sustracción.

Ejemplo: Determínese el número que hay que sumar a 376 para obtener 523 como suma. Si escribimos esto mediante un enunciado matemático, toma la forma de 376 + n = 523. Si los alumnos obtienen inmediatamente 147 como el sumando que debe añadirse al sumando 376 para obtener la suma, 523, no hay necesidad de ninguna otra explicación. Sin duda alguna, los alumnos podrán obtener en seguida, recordando simplemente la combinación básica de la adición apropiada, la respuesta a una pregunta sencilla como: "Determínese el número que debe sumarse, para que la suma sea 10. Pero, en el ejemplo que estamos considerando, los números son tan grandes que no se puede obtener la respuesta inmediatamente. Por tanto, el procedimiento debe ser el siguiente:

Primero, escríbase el ejercicio. $\begin{array}{r} 523 \\ -\ 376 \end{array}$

Ahora, se pone de manifiesto la necesidad de representar 523 y 376 en formas diferentes a los numerales decimales. El objetivo es colocar un número mayor de unidades en el lugar de las unidades de la suma que en el lugar de las unidades del sumando conocido, colocar más decenas en el lugar de las decenas de la suma que en el lugar de las decenas del sumando conocido, etc.

De modo que podemos escribir

$$523 = 500 + 20 + 3$$
$$376 = 300 + 70 + 6$$

como primer paso para lograr nuestro propósito.

Ahora, escribimos $523 = 500 + 10 + 13$
$376 = 300 + 70 + 6$

y $523 = 400 + 110 + 13$
$376 = 300 + 70 + 6$

de manera que, $523 - 376 = 100 + 40 + 7 = 147$.

No hay necesidad de disponer de un término especial para describir este procedimiento. Evitamos la necesidad de un término diciendo: "Escribimos 523 como 500 + 20 + 3" y lo escribimos como se indicó. La cuestión principal es darse cuenta de la necesidad de tener más unidades en el lugar de las unidades de la suma que en el lugar de las unidades del sumando conocido, más decenas en el lugar de las decenas de la suma que en el lugar de las decenas del sumando, etc.

Al efectuar la operación de adición, hay menos dificultades. Simplemente, representamos los sumandos de manera que se indique el número de unidades, de decenas, y así sucesivamente. Entonces, sumamos las unidades, las decenas, las centenas, etc.

Por ejemplo:
$$249 = 200 + 40 + 9$$
$$\underline{676 = 600 + 70 + 6}$$
$$\text{Suma} = 800 + 110 + 15$$
$$= (800 + 100) + (10 + 10) + 5$$
$$= 900 + 20 + 5$$
$$= 925$$

Aquí, el numeral, $800 + 110 + 15$ se expresó, aplicando las propiedades de nuestro sistema de numeración y las propiedades conmutativa y asociativa de la adición.

Desde luego, nos damos cuenta de que esta explicación es muy larga para darse en forma escrita. Sin embargo, puede abreviarse al presentársela a los alumnos, y puede abreviarse aún más en sus aplicaciones ulteriores. Se dan los detalles para tratar de explicar el sentido de las frases "tomar prestado", "llevar" y su eliminación final, ya que aunque suelen aplicarse correctamente, también, con frecuencia, son mal entendidas.

Una propiedad importante de la sustracción expresada con el simbolismo matemático es la siguiente:

Para un par de números cardinales representados en la forma $(a + b)$ y $(c + d)$,

$$(a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d).$$

En esta unidad, suponemos que $a + b$ es mayor que $c + d$.

A continuación, se presenta un ejemplo de la aplicación de esta propiedad para $68 - 42$. Este ejemplo indica que al escribir una resta en la forma vertical, la propiedad se aplica automáticamente.

$$\begin{aligned} 68 - 42 &= (60 + 8) - (40 + 2) \\ &= (60 - 40) + (8 - 2) \\ &= 20 + 6 \\ &= 26 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 68 \\ -\ 42 \\ \hline 26 \end{array}$$

La relación entre el ejemplo y el enunciado de la propiedad se ve, si se considera la sustitución de a por 60, de b por 8, de c por 40 y de d por 2.

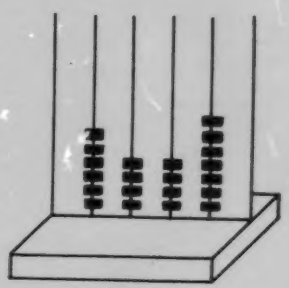
La propiedad se aplica a otras restas como $68 - 49$ ó $352 - 187$. Sin embargo, es necesario efectuar más pasos.

ENSEÑANZA DE LA UNIDAD

NOMBRES DIFERENTES PARA EL MISMO NUMERO

Objetivo: (a) Ayudar a los estudiantes a repasar la idea de "nombres diferentes para el mismo número".
(b) Ayudar a los estudiantes a representar en un ábaco nombres diferentes de un número

Materiales: Un ábaco que tenga 20 cuentas en cada una de cuatro varillas. En la figura de la derecha, se muestra una clase de ábaco. Tiene varillas insertadas en la base, con cuentas que pueden sacarse, cuando no se estén utilizando. Hay otras clases de ábacos que son también útiles. Las varillas del ábaco corresponden a los lugares de un numeral. Moviéndonos de derecha a izquierda, la primera varilla corresponde al lugar de las unidades, la segunda al lugar de las decenas, etc. El número de cuentas en la primera varilla es el número de unidades, el número de cuentas en la segunda varilla es el número de decenas, etc. El numeral representado en el ábaco de la figura es 6 millares, 4 centenas, 4 decenas y 7 unidades, o 6447.



Exploración:

> Parte del material presentado en el Comentario para el maestro, se redactó como si el maestro lo estuviera explicando a su clase. Las respuestas a las preguntas que queremos obtener de los estudiantes se incluyen entre paréntesis. Otras partes del material de exploración para esta unidad se presenta en forma de sugerencias para el maestro. También, se dan descripciones de varios procedimientos que han de utilizarse como base para

descubrir y analizar conceptos y propiedades. Estos comentarios se escribieron entre rectas verticales dobles.

Parte del material de exploración, está contenido en el Texto del estudiante. Esto es lo que ocurre con la primera sección, Nombres diferentes para el mismo número. Los estudiantes deberán darse cuenta pronto de que las frases "Nombres diferentes para el mismo número" y "Representar un número de otra manera" tienen el mismo significado.

El maestro puede pedir a los alumnos que abran sus libros en la página E297 y contesten y analicen las preguntas. Después de este estudio, los alumnos pueden resolver individualmente el Conjunto de problemas 1.

Capítulo 6

PROPIEDADES Y TECNICAS DE LA ADICION Y LA SUSTRACCION II

NOMBRES DIFERENTES PARA EL MISMO NUMERO

Hay muchas maneras de nombrar un número. El numeral decimal para 40 + 2 es 42. También puede nombrarse de otras maneras.

1. Juan dice que todos los nombres que siguen son para el mismo número. ¿Estás de acuerdo? 27 - 3; 24 + 0; 10 + 14; 25 - 1; 2 decenas y 4; 1 decena y 14. (Sí)

2. ¿Cuál es el numeral decimal para 40 + 15? (55) Da otros cinco nombres para 40 + 15. (Hay varias respuestas posibles)

3. (a) ¿Es 234 = 200 + 30 + 4? (Sí)

   (b) ¿Es 234 = 200 + 10 + 24? (Sí)

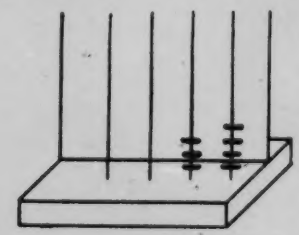
   (c) ¿Es 234 = 200 + 20 + 14? (Sí)

   (d) ¿Es 234 = 100 + 130 + 4? (Sí)

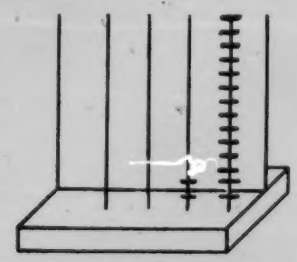
4. Puedes considerar a 67 como 6 decenas y 7 unidades o como 5 decenas y 17 unidades. ¿Cuáles son otros nombres para 67?

   ¿Podemos considerar a 726:
   como 700 + 20 + 6? (Sí)
   como 700 + 10 + 16? (Sí)
   como 600 + 120 + 6? (Sí)

Nombres diferentes para un número se presentan a menudo en un ábaco. ¿Qué nombre tiene el 34 en cada uno de los ábacos que siguen?



34 representado como 3 decenas y 4 unidades



34 representado como 2 decenas y 14 unidades

5. Da dos nombres diferentes para cada uno de los siguientes números. Indica cada uno en el ábaco. (Hay varias respuestas posibles.)

(a) 46 (b) 97 (c) 263

Conjunto de problemas 1

Copia los numerales del 1 al 10 en tu hoja de papel. Próximo a cada uno, escribe las respuestas correctas para completar la tabla siguiente:

	Numeral decimal	Otro nombre para el número
1.	(137)	120 + 17
2.	(1378)	1200 + 160 + 18
3.	523	(400+110+13)
4.	(78)	6 decenas + 18
5.	96	(80+16)
6.	(558)	4 centenas + 15 decenas + 8
7.	238	(200+20+18)
8.	49	(3 decenas + 19)
9.	(1749)	15 centenas + 23 decenas + 19
10.	1,526	(14 centenas+12 decenas+6)

Para cada uno de los ejercicios del 11 al 13, escribe > o < de manera que el enunciado matemático sea cierto. En el ejercicio 11, ¿es 1000 + 300 + 60 + 16 otro nombre para 1376? (Sí)

11. 1,378 (>) 1000 + 300 + 60 + 16

12. 2,874 (>) 1 millar + 17 centenas + 16 decenas + 4 unidades

13. 4,926 (>) 3 millares + 18 centenas + 11 decenas + 6 unidades

REPASO DE LA ADICION

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a repasar las técnicas de la adición en las que representar la suma como un numeral decimal es un procedimiento sencillo.

Exploración:

En la pizarra, aparecen cuatro ejercicios de adición.

(a) $3 + 4$ (c) $300 + 400$

(b) $30 + 40$ (d) $3000 + 4000$

Determinen un numeral que represente la suma en cada uno de los ejercicios. En (a), el numeral es 7; en (b), es 70, que significa 7 decenas; en (c) es 700, que significa 7 centenas. En (d), es 7000, que significa 7 millares.)

Los ejercicios como (b), (c) y (d) se disponen a menudo en forma de columna, porque ésta es una manera fácil de agrupar las unidades, las decenas, las centenas, etc.

$$\begin{array}{lll} (b)\ \ 30 & (c)\ \ 300 & (d)\ \ 3000 \\ +\ \underline{40} & +\ \underline{400} & +\ \underline{4000} \end{array}$$

¿Cómo sumamos 23 y 45? (La suma de 20 y 40 es 60. La suma de 3 y 5 es 8. La suma de 60 y 8 es 68.) Este es un ejercicio sencillo, pero debemos estudiarlo, porque para resolverlo tenemos que utilizar varias propiedades importantes. Determinemos cuáles son.

Consideraron 23 y 45 de otra manera. ¿Cuál fue esta manera? (Obtuvieron otros nombres para los dos números. $23 = 20 + 3$. $45 = 40 + 5$.)

¿Consideraron $23 + 45$ como $(20 + 3) + (40 + 5)$? (Sí, pero utilizamos la propiedad conmutativa y la propiedad asociativa para obtener $(20 + 40) + (3 + 5)$. ¿Por qué necesitaron hacer esto? (Para poder obtener $60 + 8$ ó 68.)

¿Podremos disponer nuestro trabajo de la siguiente manera?

$$23 + 45 = 20 + 3 + 40 + 5 = (20 + 40) + (3 + 5) = 60 + 8 = 68$$

Para presentarlo a los estudiantes, podemos escribir el trabajo como se indica en el enunciado anterior. Pero los mejores alumnos, posiblemente todos, deben saber que se llevan a cabo los siguientes pasos, u otros análogos:

$$(20 + 3) + (40 + 5) = (20 + 3) + (5 + 40)$$
Propiedad conmutativa
$$= 20 + [3 + (5 + 40)]$$
Propiedad asociativa
$$= 20 + [(3 + 5) + 40]$$
Propiedad asociativa
$$= 20 + [8 + 40]$$
Sumando 3 y 5
$$= 20 + [40 + 8]$$
Propiedad conmutativa
$$= [20 + 40] + 8$$
Propiedad asociativa
$$= 60 + 8$$
Sumando 20 y 40
$$= 68$$
Sumando 60 y 8

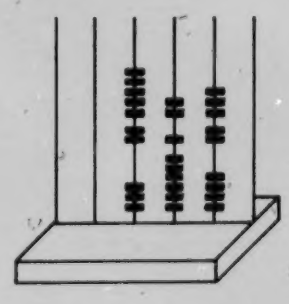
Disponer los sumandos en forma de columna, es útil en cualquier ejercicio como el anterior. Podemos escribir en otra forma todo lo que hemos dicho:

$$\begin{aligned} 23 &= 20 + 3 \\ 45 &= \underline{40 + 5} \\ & \quad 60 + 8 = 68 \end{aligned}$$

Hagamos otros ejercicios con más sumandos y representemos la adición en un ábaco y estudiemos las propiedades que utilizamos.

Representemos los tres sumandos de la siguiente adición:

$$\begin{aligned} & 523 \\ & 212 \\ & \underline{364} \end{aligned}$$



¿Cuál es una forma conveniente de disponer los sumandos? (La forma que se indica a la derecha deberá escribirse en la pizarra.)

$$\begin{aligned} 523 &= 500 + 20 + 3 \\ 212 &= 200 + 10 + 2 \\ \underline{364} &= \underline{300 + 60 + 4} \end{aligned}$$

Para representar la suma en el ábaco, podemos combinar las cuentas columna por columna. ¿Dónde empezaremos? (Combinamos primero las cuentas en la varilla de las unidades: 3 y 2 son 5, y 5 y 4 son 9.)

Luego, combinamos las cuentas de la varilla de las decenas y después las de la varilla de las centenas. Háganse preguntas adecuadas, para que los alumnos entiendan el procedimiento. Debe completarse la representación escrita del ejercicio:

$$\begin{aligned} 523 &= 500 + 20 + 3 \\ 212 &= 200 + 10 + 2 \\ 364 &= \underline{300 + 60 + 4} \\ & \quad 1000 + 90 + 9 = 1099 \end{aligned}$$

El maestro y los alumnos deben estudiar varios ejercicios para que los alumnos se den cuenta de que disponer un ejercicio en forma de columna los ayuda a considerar las unidades juntas, las decenas juntas, etc.

Debe procurarse que los alumnos escriban los dígitos bien alineados uno debajo del otro, a medida que los colocan en columnas. Tener cuidado en la escritura contribuye a mejorar la destreza y la precisión.

La conveniencia de la disposición vertical debe recalcarse como un medio de obtener las respuestas eficazmente. Al mismo tiempo, el objetivo más importante de esta unidad es ayudar a los estudiantes a comprender lo que están haciendo.

Estudiar la operación de adición detenidamente y representarla en el ábaco, nos ayuda a comprender el método de sumar.

Necesitamos obtener un método de sumar rápidamente. También, tenemos que estar seguros de que las sumas que obtenemos son correctas.

El maestro deberá dar a los estudiantes ejercicios de adición en los que la suma de alguna de las columnas sea mayor que 9. Los estudiantes sumarán cada columna ordenadamente de derecha a izquierda y anotarán la suma de cada columna, a medida que la obtengan.

En la resolución de problemas, frecuentemente, es necesario sumar numerales con varios dígitos. Consideremos el problema 1 del Conjunto de problemas 2 de la página E299.

(1) Un vendedor recorrió 453 millas en enero y 523 en febrero. ¿Qué distancia recorrió en los dos meses?

En este ejemplo, utilizaremos el método que empleamos anteriormente para obtener la respuesta a la pregunta planteada en un problema.

Lean el ejemplo (1) detenidamente. ¿Cuál es la pregunta planteada? ¿Qué información se da? Escriban el enunciado matemático que describe el problema. (453 + 523 = n) ¿Qué operación deben utilizar? (La adición) Contesten la pregunta del problema. (El vendedor recorrió 976 millas en los dos meses.)

Debe procurarse que los alumnos dispongan su trabajo así:

$$453 + 523 = n$$

$$\begin{array}{r} 453 \\ +\ 523 \\ \hline 976 \end{array}$$

El vendedor recorrió 976 millas en enero y febrero.

Ahora, los alumnos pueden resolver el Conjunto de problemas 2, individualmente.

E299

REPASO DE LA ADICION

Conjunto de problemas 2

1. Un vendedor recorrió 453 millas en enero y 523 millas en febrero. ¿Qué distancia recorrió en los dos meses? (453 + 523 = m. El vendedor recorrió 976 millas en los dos meses.)
2. El vendedor recorrió 230 millar en marzo, 310 millas en abril, y 345 millas en mayo. ¿Cuántas millas recorrió en los tres meses? (230 + 310 + 345 = m. El vendedor recorrió 885 millas en los tres meses.)
3. Desde enero hasta junio, el vendedor recorrió 2,010 millas. Desde julio hasta diciembre, recorrió 1,854 millas. ¿Qué distancia recorrió durante el año? (2,010 + 1,854 = m. Recorrió 3,864 millas durante el año.)
4. Hallaste la distancia que el vendedor recorrió en un año en el ejercicio 3. Durante otro año recorrió 4,013 millas. ¿Cuál fue su millaje durante los dos años? (3,864 + 4,013 = m. El vendedor recorrió 7,877 millas durante los dos años.)
5. Durante un viaje en automóvil, Felipe y Carolina idearon un juego, contando las guaguas y camiones que vieran en la carretera. Felipe contó 234 guaguas y Carolina contó 205 camiones. ¿Cuántas guaguas y camiones contaron en total? (234 + 205 = m. Contaron 439 guaguas y camiones en total.)
6. José y Tomás han estado recogiendo piedras para el empedrado del nuevo camino que su padre está haciendo. José ha recogido 172 piedras y Tomás ha recogido 213. ¿Cuántas piedras han recogido los dos juntos? (172 + 213 = m. Los dos juntos han recogido 385 piedras.)

MAS SOBRE LA ADICION

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a entender la técnica para sumar números cuyos numerales tienen varios dígitos y a comprender cómo esta técnica depende de las propiedades de nuestro sistema de numeración y de las propiedades conmutativa y asociativa de la adición.

Materiales: Abaco (También, pueden utilizarse tablas de valor posicional.)

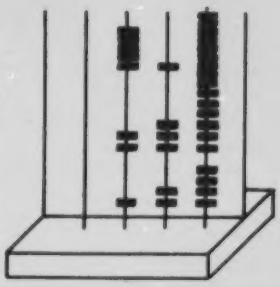
Exploración:

Determinemos el valor de n, si n = 517 + 238 + 124.

Represéntense los sumandos de este ejercicio en el ábaco.

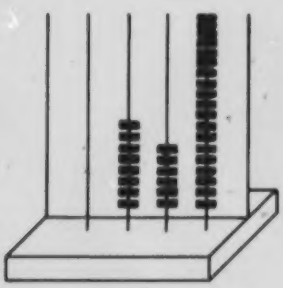
Escríbase lo siguiente en la pizarra:

$$\begin{aligned} 517 &= 500 + 10 + 7 \\ 238 &= 200 + 30 + 8 \\ \underline{124} &= \underline{100 + 20 + 4} \end{aligned}$$



Explique cómo se representó en el ábaco cada uno de los numerales que escribimos en la pizarra.

Ahora, muéstrese la suma de las unidades, las decenas y las centenas en el ábaco y en la pizarra.



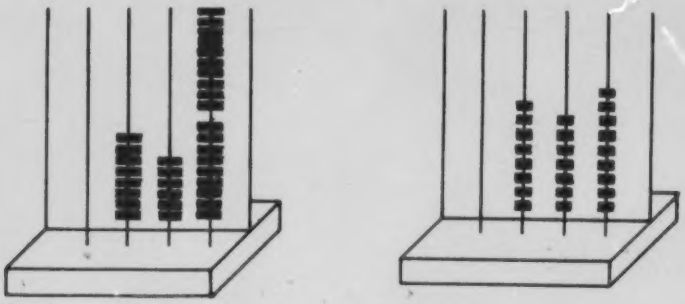
$$\begin{aligned} &500 + 10 + 7 \\ &200 + 30 + 8 \\ &\underline{100 + 20 + 4} \\ &800 + 60 + 19 \end{aligned}$$

¿Es la suma 800 + 60 + 19? ¿Cómo pueden representar esto mediante un decimal numeral?

He aquí la manera de escribir nuestro razonamiento:

800 + 60 + 19 =
800 + 60 + (10 + 9) = V. la figura A más adelante.
800 + (60 + 10) + 9 =
800 + 70 + 9 = 879 V. la figura B más adelante.

Indiquen en el ábaco la manera de representar la suma mediante un numeral decimal.



A B

(Se redisponen las 19 cuentas del lugar de las unidades en dos grupos de 10 y de 9 cuentas, como se indica en la figura A. Entonces, se sustituye el grupo de 10 cuentas en el lugar de las unidades por 1 cuenta en el lugar de las decenas, como se indica en la figura B.)

Ahora, es fácil representar la suma como un numeral decimal, 879.

El maestro deberá utilizar otros ejemplos parecidos, según se necesiten para explicar los conceptos fundamentales para la técnica de la adición. Sirve de ayuda a los estudiantes analizar el proceso y representarlo mediante la escritura y en el ábaco.

Algunas veces, representar una suma con un numeral decimal requiere más pasos. Uno de estos ejemplos es 375 + 278.

Quizás, el maestro quiera utilizar el ábaco para representar el procedimiento de calcular esa suma. Empléese o no el ábaco, el procedimiento debe estudiarse detenidamente:

$$500 + 140 + 13$$
$$500 + 140 + (10 + 3)$$
$$500 + (140 + 10) + 3$$
$$500 + (100 + 50) + 3$$
$$(500 + 100) + 50 + 3 = 653$$

No siempre utilizamos este método largo de sumar. Algunos de nosotros podemos "determinar la respuesta" sin escribir cosa alguna. Estudiemos juntos el ejemplo:

$$\begin{array}{r} 375 \\ +\ \underline{278} \\ 13 \\ 140 \\ \underline{500} \\ 653 \end{array}$$

¿Cuál es la suma de las unidades? (13) Observen que la escribimos debajo del 78 en 278. ¿Qué lugar ocupa el 3 en 13? (El lugar de las unidades) ¿Qué lugar ocupa el 1? (El lugar de las decenas) ¿Es 1 decena y 3 unidades el significado de 13? (Sí)

¿Cuál es la suma de las decenas? (14) ¿Dónde deberé escribirla? (Escribimos 0 en el lugar de las unidades, 4 en el lugar de las decenas y 1 en el lugar de las centenas.)

¿Cómo podemos determinar la suma? (Se suman los números 13, 140 y 500.) ¿Cuál es la suma? (653)

La exploración anterior se resume en las páginas E300 y E301. Deben estudiarla los alumnos y el maestro. Entonces, los alumnos pueden resolver el Conjunto de problemas 3, individualmente.

E300

MAS SOBRE LA ADICION

1. ¿Qué número es n, si $423 + 345 + 214 = n$?

   Primero, sitúa las cuentas en el ábaco para indicar los sumandos de mahera que cada sumando esté separado de los otros.

   $$\begin{array}{r} 400 + 20 + 3 \\ 300 + 40 + 5 \\ \underline{200 + 10 + 4} \end{array}$$

   Luego, indica el resultado de sumar las unidades. Indica el resultado de sumar las decenas. Indica el resultado de sumar las centenas.

   $$\begin{array}{r} 400 + 20 + 3 \\ 300 + 40 + 5 \\ \underline{200 + 10 + 4} \\ 900 + 70 + 12 \end{array}$$

   Ahora, $423 + 345 + 214 = 900 + 70 + 12$.

   $900 + 70 + 12$ se considera como $900 + 70 + (10 + 2)$.

   $900 + 70 + (10 + 2) = 900 + (70 + 10) + 2$

   ¿Cuál es el numeral decimal para $900 + 80 + 2$? (982)

2. Ahora, trata de sumar 342, 124 y 418, sin el ábaco. Observa el encasillado A.

   a. ¿Qué números se sumaron primero? (800 unidades)

   b. ¿Qué numeral decimal es $800 + 70 + 14$? (884)

$$\begin{array}{rl} 342 = & 300 + 40 + 2 \\ 124 = & 100 + 20 + 4 \\ 418 = & \underline{400 + 10 + 8} \\ & 800 + 70 + 14 = 884 \end{array}$$

A

3. Halla n, si 275 + 278 = n. Podrías tratar el método de la página anterior. En el encasillado B, el numeral decimal 653 se obtuvo, sumando 500, 140 y 13.

375 = 300 + 70 + 5
278 = 200 + 70 + 8
500 + 140 + 13 = 653

B

4. Algunas veces, 375 y 278 se suman como en el encasillado C. ¿Qué números se sumaron para obtener 13? (5 y 8) ¿Cómo obtienes 140? (Se suman 70 y 70) ¿Cómo obtienes 500? (Se suman 300 y 200.) ¿Cómo se obtiene 653? (Se suman 500, 140 y 13.)

375
278
13
140
500
653

C

El método del encasillado C puede ser más conveniente para ti.

Conjunto de problemas 3

1. Usa el método del encasillado B para hallar cada suma:

43	167	346	558	1287
29	254	186	645	3648
(72)	(421)	(532)	(1203)	(4935)

2. Usa el método del encasillado C para hallar cada suma:

429	697	1278	8296	6278
385	134	4193	1376	1032
(814)	(831)	(5471)	(9672)	(7310)

OTRO METODO PARA SUMAR

La mayoría de las gentes utiliza un método más corto de sumar. Varios de ustedes ya lo están empleando. Sumemos los números siguientes:

366
298
452
647

¿Cuál es la suma de las unidades? (23)

¿Cuál es la suma de las decenas? (24)

¿Cuál es la suma de las centenas? (15)

Hemos escrito estos números así:

23
240
1500
1763

Entonces, los sumamos para obtener la suma de los sumandos.

Ustedes pueden utilizar este método y escribir solamente parte de la suma y recordar la otra parte.

Este procedimiento se resume en la página E302. El maestro deberá analizarlo junto con la clase. Los alumnos deben resolver tantos problemas como sean necesarios para desarrollar su destreza en la resolución de este tipo de problemas de adición. Recálquese la importancia de saber los conceptos fundamentales para la técnica de la adición. En este momento, pueden asignarse los Conjuntos de problemas 4, 5 y 6 como tares independiente. Las resoluciones de los problemas del Conjunto de problemas 5 deben disponerse en la forma descrita en la página 515 de este Comentario para el maestro.

E302

OTRO METODO PARA SUMAR

La adición es una operación con dos números. Cuando efectuamos una operación con 15 y 3, y obtenemos 18, hemos sumado. (15 + 3 = 18) Dieciocho se llama la suma. Quince y tres se llaman los sumandos.

Un ejercicio de adición se escribe en columnas para facilitar la suma. Las columnas ayudan a mantener las unidades juntas, las decenas juntas, las centenas juntas, y así sucesivamente.

En la suma por columnas, las unidades se suman primero, luego las decenas, después las centenas, y así sucesivamente.

Parte de la suma de la columna de las unidades se retiene algunas veces. Entonces se suma junto con las decenas.

Parte de la suma de la columna de las decenas se retiene algunas veces. Entonces se suma junto con las centenas.

329
146
948

Para sumar, digo: 9 y 6 son 15, y 15 y 8 son 23. Considero 23 como 2 decenas y 3 unidades. Anoto 3 y retengo 2 decenas.

Dos decenas y 2 decenas son 4 decenas; 4 decenas y 4 decenas son 8 decenas y 8 decenas y 4 decenas son 12 decenas. Considero 12 decenas como una centena y 2 decenas. Anoto 2 decenas y retengo 1 centena.

Una centena y 3 centenas son 4 centenas; 4 centenas y 1 centena son 5 centenas; y 5 centenas y 9 centenas son 14 centenas. Anoto 14 centenas.

Conjunto de problemas 4

Halla las sumas para los ejercicios del 1 al 5:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
1.	43	57	19	76	68	53
	29	38	46	15	28	17
	(72)	(95)	(65)	(91)	(96)	(70)
2.	126	348	167	239	468	282
	246	629	726	43	504	509
	(372)	(977)	(893)	(282)	(972)	(791)
3.	563	635	447	563	38	647
	128	406	129	129	257	39
	(691)	(1041)	(576)	(692)	(295)	(686)
4.	174	88	489	179	266	593
	138	543	272	658	698	248
	(312)	(631)	(761)	(837)	(964)	(841)
5.	347	256	1591	1876	8976	1762
	897	1297	8643	7235	1235	4391
	304	540	9275	8544	7142	3065
	(1,548)	698	5873	6718	6473	8572
		(2,791)	(25,382)	(24,373)	(23,826)	(17,790)

6. Halla n para cada uno de los ejercicios del (a) al (d):

(a) $n = 697 + 384$ ($n = 1081$)

(b) $n = 672 + 1278$ ($n = 1950$)

(c) $n - 559 = 2476$ ($n = 3035$)

(d) $362 = n - 875$ ($n = 1237$)

E304

Conjunto de problemas 5

1. Haz una lista del número de días en cada uno de los primeros seis meses de este año. ¿Cuántos días hay en los primeros seis meses de este año? (31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 = n. Hay 181 días en los primeros seis meses de este año.)

2. Haz una lista del número de días en cada uno de los últimos seis meses de este año. ¿Cuántos días hay en los últimos seis meses de este año? (31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = n. Hay 184 días en los últimos seis meses de este año.)

3. Juan fue a una librería. Encontró 5 revistas que necesitaba. Sus precios eran 75¢, 20¢, 25¢, 55¢ y 95¢. Compró las tres que eran más baratas. ¿Cuánto costaron en total? (20 + 25 + 55 = n. Juan pagó 100¢, o sea $1.00, por las tres revistas más baratas.)

4. En la biblioteca se prestaron 135 libros el lunes, 140 libros el martes, 168 libros el miércoles, 174 libros el jueves, y 147 libros el viernes. ¿Cuántos libros se prestaron durante esos cinco días? (135 + 140 + 168 + 174 + 147 = n. Se prestaron 764 libros durante esos cinco días.)

5. La familia Rivera hizo un viaje en automóvil desde la ciudad de Nueva York hasta Boston. En el viaje, emplearon cinco horas. Las distancias que recorrieron cada hora fueron, respectivamente, 36 millas, 44 millas, 47 millas, 41 millas y 38 millas. ¿Cuántas millas recorrieron en las cinco horas? (36 + 44 + 47 + 41 + 38 = n. La familia Rivera recorrió 206 millas en cinco horas.)

6. La madre de Juan le compró una chaqueta, una gorra, zapatos y botas. El costo de la chaqueta fue $18, la gorra $3, los zapatos $8 y las botas $6. ¿Cuánto pagó por todo? (18 + 3 + 8 + 6 = n. Pagó $35 por todo.)

E305

7. Hay 65,761 indios en Arizona, 53,769 en Oklahoma, y 41,901 en Nuevo Méjico. ¿Cuántos indios viven en esos tres estados? (65,761 + 53,769 + 41,901 = m. En estos tres estados, viven 161,431 indios.)
8. Hay 629 niños y 587 niñas en la Escuela Tapia. ¿Cuántos alumnos asisten a la Escuela Tapia? (629 + 587 = m. A la Escuela Tapia asisten 1216 alumnos.)
9. En 1940, había 172,172 personas en Miami, Florida. En 1950 había viviendo allí 87,063 más personas que en 1940. ¿Cuántas personas vivían en Miami en 1950? (172,172 + 87,063 = m. En 1950, 259,235 personas vivían en Miami.)
10. Durante una venta de dulces, María vendió 232 cajas de mentas. Susana vendió 472 cajas y Juana vendió 143 cajas. Halla el número total de cajas vendidas por las tres niñas. (232 + 472 + 143 = m. Vendieron 847 cajas de dulces.)
11. Los discípulos de la Escuela Universal recogieron regalos para niños pobres en las Navidades. Recogieron 433 libros, 316 juguetes, 252 juegos, y 164 rompecabezas. ¿Cuántos regalos recogieron en total? (433 + 316 + 252 + 164 = m. Recogieron 1165 regalos en total.)

Conjunto de problemas 6

Copia los numerales del 1 al 8 en tu hoja de papel. Al lado de cada numeral, escribe las palabras y los numerales necesarios para completar la tabla siguiente:

	Números con los cuales se efectúa la operación	Resultado	Operación utilizada	Enunciado matemático
1.	15, 289	(304)	Adición	(15 + 289 = m)
2.	139, 76	215	Adición	(139 + 76 = m)
3.	(674, 879)	n	Adición	674 + 879 = n
4.	71, 56	127	(Adición)	(71 + 56 = m)
5.	641, (379 + 81)	(1101)	Adición	(641 + (379 + 81) = m)
6.	162, 69	(231)	Adición	(162 + 69 = m)
7.	345, 187	532	(Adición)	(345 + 187 = m)
8.	647, 387	(1034)	Adición	(647 + 387 = m)

Escribe = ó ≠ de modo que cada uno de los ejercicios desde el 9 hasta el 15 sean enunciados matemáticos ciertos.

9. 372 + 499 (≠) 773

10. 312 + 184 (≠) 128

11. 346 + n (≠) 179, si n = 177

12. n + 156 (≠) 394, si n = 328

13. n - 341 (=) 159, si n = 500

14. Si n = 379, entonces n + 172 (≠) 308 + 233

15. Si n = 473, entonces 896 + n (≠) 674 + 595

REPASO DE LA SUSTRACCION

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a repasar la técnica de la sustracción en los casos en que se obtiene el sumando desconocido mediante un procedimiento sencillo.

Exploración:

La sustracción es una operación con números. Cuando estudiamos sus propiedades, efectuamos la operación con números como 8 y 5. Ahora, aprenderemos un método de restar números cuyos numerales tienen varios dígitos.

Consideremos los siguientes enunciados:

(a) $6 - 2 = n$ (c) $600 - 200 = n$

(b) $60 - 20 = n$ (d) $6000 - 2000 = n$

¿Cuál es la suma en cada caso? (En el enunciado (a), la suma es 6. En el enunciado (b), es 60. En el enunciado (c), es 400. En el enunciado (d), es 4000.)

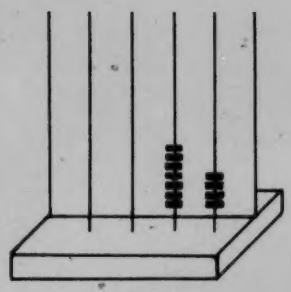
Los problemas de sustracción como los problemas (b), (c) y (d), a menudo, se escriben en forma de columna, como se hace con los problemas de adición. Sabemos que ésta es una manera conveniente de mantener las unidades, las decenas, las centenas, etc., en la misma columna.

(b)	(c)	(d)
60	600	6000
- 20	- 200	- 2000

¿Cómo se resta 32 de 74?

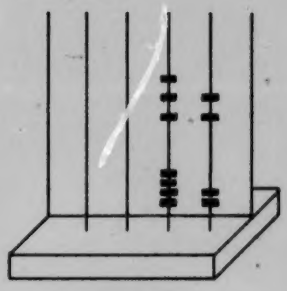
74	(2 restado de 4 es 2.)
- 32	(30 restado de 70 es 40.)
42	(32 es un sumando, el otro sumando es 42.)

¿Cómo podemos representar esto en un ábaco? (Empezaremos con 74, porque 74 es la suma. (V. la figura I.))



I

El sumando conocido es 32. A "7 decenas" y "4 unidades" le quitamos "3 decenas" y "2 unidades". ¿Cuántas decenas y unidades hay en el sumando desconocido? (V. la figura II.) (4 decenas y 2 unidades) ¿Cuál es el sumando desconocido? (42)



II

Podemos representar este ejercicio de sustracción en la pizarra. Lo escribimos en forma de columna, así:

$$\begin{aligned} 74 &= 70 + 4 \\ -\ \underline{32} &= \underline{30 + 2} \\ 40 &+ 2 = 42 \end{aligned}$$

Restar por columnas, como sumar por columnas, nos ayuda a considerar las unidades juntas, las decenas juntas, etc. A continuación, aparecen varios ejercicios:

(a)	(b)	(c)
734	9400	2640
- 213	- 3300	- 1420

Indiquen cómo restarían en cada uno de los ejercicios, considerando las unidades decenas, centenas, etc.

Ahora, puede asignarse el Conjunto de problemas 7. Los alumnos deberán resolver varios ejercicios de este tipo, en los que no es necesario reagrupar la suma.

E307

REPASO DE LA SUSTRACCION

Conjunto de problemas 7

1. Jorge escribió 524 como respuesta a un ejercicio. Debería haber sido 639. ¿En cuánto difería su respuesta de la respuesta correcta? (639 - 524 = m, o 524 + m = 639. Su respuesta estaba 115 en defecto.)

2. El encargado del zoológico le dijo a Jaime que el gorila grande pesaba 572 libras y el pequeño pesaba 361 libras. ¿Cuánto más pesa el gorila grande? (572 - 361 = m o 361 + m = 572. El gorila grande pesa 211 libras mas.)

3. En 1950, la población de una ciudad era 6,478. Para el 1960 había aumentado a 9,699. ¿Cuál fue el aumento en población durante el período de diez años?
(9699 - 6478 = m o 6478 + m = 9699.)

4. Los niños escuchas organizaron una campaña de papel. El Grupo 51 recogió 8,200 libras de papel. Deseaban recoger 9,600 libras. ¿Cuántas libras más necesitan recoger?
(9600 - 8200 = m o 8200 + m = 9600. El Grupo 51 tiene que recoger 1400 libras más de papel.)

5. Resta:

665	841	937	269
152	721	125	253
(513)	(120)	(812)	(16)

6. Halla n de manera que cada enunciado matemático sea cierto:

(a) n + 395 = 697 (m = 302)

(b) n = 1158 - 737 (m = 421)

(c) 863 + n = 1175 (m = 312)

(d) 2378 - 2163 = n (m = 215)

MAS SOBRE LA SUSTRACCION

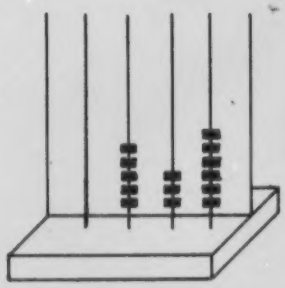
Objetivo: Ayudar a los estudiantes a comprender la técnica para restar números cuyos numerales contengan varios dígitos y cómo esta técnica depende de las propiedades de nuestro sistema de numeración.

Materiales: Abaco

Exploración:

Estudiemos juntos el siguiente problema: "Juana leyó 536 páginas de varios libros de la biblioteca en un mes y Emilia leyó 218 páginas. ¿Cuántas páginas más tendrá que leer Emilia para haber leído tantas páginas como Juana?"

Estudien el problema detenidamente. ¿Cuál es la pregunta que se plantea? ¿Qué información nos da el problema? Escriban un enunciado matemática que represente la situación planteada en el problema. (218 + p = 536 ó p = 536 - 218) ¿Qué operación debemos efectuar para contestar la pregunta? (Sustracción) Escriban la sustracción en forma de columna. Representen la misma en un ábaco. (V. la figura I.)



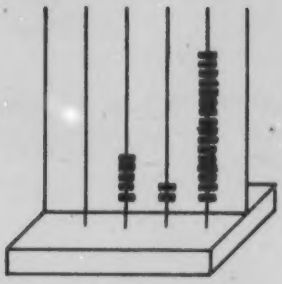
I

536
218

Indiquen cómo se expresa la suma y el sumando desconocido en la pizarra.

536 = 500 + 30 + 6
218 = 200 + 10 + 8

¿Podremos restar el sumando conocido de la suma en el ábaco? (No, porque la suma tiene muy pocas cuentas en el lugar de las unidades.) Indiquen en el ábaco cómo podemos reagrupar la suma para obtener más unidades. (Se cambia a 5 centenas, 2 decenas y 16 unidades.)



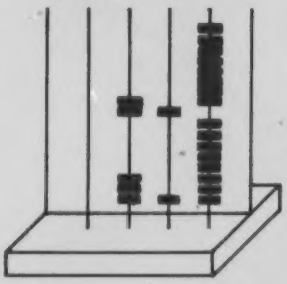
II

Escriban esto en la pizarra.

$$536 = 500 + 30 + 6 = 500 + 20 + 16$$
$$\underline{218} = \underline{200 + 10 + 8} = \underline{200 + 10 + 8}$$

¿Podremos restar ahora el sumando conocido de la suma en el ábaco? (Sí) Ilustren esto. (V. la figura III.)

¿Cuál es el otro sumando? (318)



III

¿Podremos representar en la pizarra la manera de efectuar la sustracción? (Sí) Describan la sustracción. (16 - 8 = 8. 20 - 10 = 10. 500 - 200 = 300. El 8 se escribe en el lugar de las unidades, el 1 se escribe en el lugar de las decenas y el 3 en el lugar de las centenas. El otro sumando es 318.)

$$536 = 500 + 30 + 6 = 500 + 20 + 16$$
$$\underline{218} = \underline{200 + 10 + 8} = \underline{200 + 10 + 8}$$
$$300 + 10 + 8 = 318$$

El maestro debe proporcionar a los estudiantes tantos ejercicios como sean necesarios para que comprendan los conceptos fundamentales de la técnica de la sustracción. Los pasos deben representarse en forma escrita y en el ábaco, según convenga.

En los ejercicios 1 y 2 de las páginas E308 y E309, se presenta un resumen de la Exploración anterior. El maestro deberá estudiarlo junto con la clase.

Algunas veces, resulta más difícil representar el sumando desconocido con un numeral decimal. En el ejercicio 3 de la página E309, se da un ejemplo y se describe un método de cómo completar la sustracción. El maestro deberá analizarlo detenidamente con la clase. Aquí, no se incluye una descripción ulterior. No es importante la rapidez al completar un procedimiento como ése y no se recomienda que se dé práctica excesiva. Al mismo tiempo, se recomienda que se utilice este método para algunos ejercicios escogidos ahora y más tarde en el curso.

E308

MAS SOBRE LA SUSTRACCION

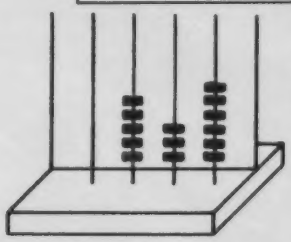
La sustracción es una operación para hallar el sumando desconocido si se conocen la suma y un sumando. Para hallar 536 - 218, has aprendido a disponer la operación como se muestra en el encasillado A.

A	536	suma
	218	sumando
	?	sumando desconocido

1. ¿Podrías restar, usando la forma del encasillado B? ¿Por qué?

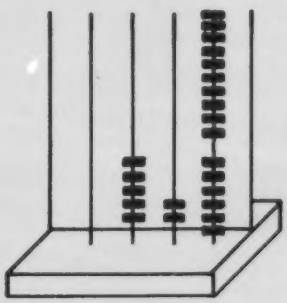
B	536 = 500 + 30 + 6	
	218 = 200 + 10 + 8	

Utilicemos, ahora, el ábaco para ayudarnos a pensar acerca de este proceso. Primero, indicamos la suma 536 en el ábaco.



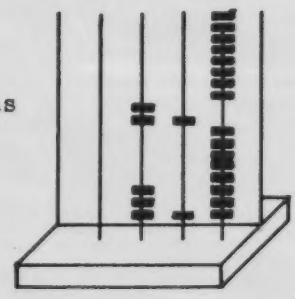
500 + 30 + 6
200 + 10 + 8

Luego, consideramos la suma 536 como 500 + 20 + 16.



500 + 20 + 16
200 + 10 + 8

Ahora, separamos las cuentas para mostrar el sumando conocido, 218, y el otro sumando. ¿Cuál es el otro sumando?



500 + 20 + 16
200 + 10 + 8

2. La sustracción anterior se puede escribir así:

$$536 = 500 + 30 + 6 = 500 + 20 + 16$$
$$\underline{218} = \underline{200 + 10 + 8} = \underline{200 + 10 + 8}$$
$$300 + 10 + 8 = 318$$

3. Algunas veces, hallar el sumando desconocido es más difícil. Por ejemplo, ¿qué es n, si $268 + n = 932$? Podemos escribir:

$$932 = 900 + 30 + 2 = 900 + 20 + 12 = 800 + 120 + 12$$
$$\underline{268} = \underline{200 + 60 + 8} = \underline{200 + 60 + 8} = \underline{200 + 60 + 8}$$
$$600 + 60 + 4 = 664$$

Explica cómo podemos pensar, cuando restemos de esta forma. ¿Cuál es el otro sumando?

Ahora, busquemos un método más abreviado de escribir los pasos en un problema de sustracción. Nota cómo esta forma corresponde a la de arriba. Empezamos con

932	9 centenas, 3 decenas, 2 unidades
- 268	2 centenas, 6 decenas, 8 unidades

No podemos restar en la columna de las unidades, de modo que reagrupamos

9 ~~3~~ (12)	9 centenas, 2 decenas, 12 unidades
2 6 8	2 centenas, 6 decenas, 8 unidades

No podemos restar en la columna de las decenas, de modo que reagrupamos de nuevo

(8) (12) (12)	
~~9~~ ~~3~~ ~~2~~	8 centenas, 12 decenas, 12 unidades
- 2 6 8	2 centenas, 6 decenas, 8 unidades
6 6 4	

12 - 8 = 4, 4 unidades

12 - 6 = 6, 6 decenas

8 - 2 = 6, 6 centenas

536

OTRO METODO PARA RESTAR

Hay otro método más corto para restar que utiliza la mayoría de las gentes. Ustedes pueden emplearlo, también. Es muy parecido al método corto para sumar. El método requiere que se piense en un nombre conveniente para la suma, en lugar de escribirlo. Consideremos los siguientes ejercicios:

(a)	(b)	(c)
75	41	58
- 23	- 23	- 23

En el ejercicio (a), ¿podrá restarse el 23 directamente, a medida que se nombra la suma? (Sí) ¿Y en el ejercicio (b)? (No) ¿Y en el (c)? (Sí)

Estudiemos el ejercicio (b). Sin escribir nada, ¿pueden considerar a 4 decenas y 1 unidad, de tal manera que se puedan restar 2 decenas y 3 unidades? (Sí, se piensa en 3 decenas + 11 unidades.)

Recuerden esto y resten. Describan su razonamiento. (11 - 3 = 8. 3 decenas - 2 decenas es 1 decena, o 10. El resultado es 18.)

Traten de hacer los siguientes ejercicios, pensando acerca de un nombre conveniente para la suma.

(d)	(e)	(f)	(g)
43	75	424	424
- 28	- 36	- 162	- 248

Contesten la pregunta siguiente, relativa a cada ejercicio: ¿Cómo debemos representar la suma para restar el sumando conocido?

(d) 43 = 30 + 13

(e) 75 = 60 + 15

(f) 424 = 300 + 120 + 4

(g) 424 = 300 + 110 + 14

No se espera que los alumnos puedan dar una contestación correcta inmediata a ejercicios como el (g) anterior. El objetivo de esta explicación es ayudar a los estudiantes a comprender lo que están haciendo.

Si pueden dar y escribir las razones para el planteamiento siguiente, el maestro debe considerar que ya entienden la técnica:

$$424 = 400 + 20 + 4 = 400 + 10 + 14 = 300 + 110 + 14$$
$$\underline{248} = \underline{200 + 40 + 8} = \underline{200 + 40 + 8} = 200 + 40 + 8$$

El maestro y la clase deben leer y estudiar la página E310. Después, pueden asignarse los Conjuntos de problemas 8 y 9, para que los estudiantes los completen independientemente. En el Conjunto de problemas 9, los alumnos deberán disponer su trabajo para la resolución de cada problema, de la manera que se indica en la página 515 de este Comentario.

En el Conjunto de problemas 10, debe darse especial atención a sustracciones como 800 - 342, en las que el numeral que representa la suma contiene uno o más ceros.

Utilizando solamente decenas, centenas, millares, etc., den varios nombres diferentes para los siguientes números:

400 (4 centenas o 40 decenas)

1000 (1 millar o 10 centenas o 100 decenas)

A continuación, presentamos varios problemas de sustracción. ¿Cómo debemos considerar la suma en cada uno, de manera que sea fácil obtener el sumando desconocido?

(a)	(b)	(c)	(d)
6000	6000	6000	6000
- 2000	- 2300	- 2340	- 2345

(a) 6000 = 6 millares

(b) 6000 = 5 millares + 10 centenas

(c) 6000 = 59 centenas + 10 decenas

(d) 6000 = 599 decenas + 10 unidades

Escriban su trabajo para los problemas (b), (c) y (d) así:

(b)

$$6000 = 5000 + 1000$$
$$2300 = \underline{2000 + 300}$$
$$3000 + 700 = 3,700$$

(c)

$$6000 = 5900 + 100$$
$$2340 = \underline{2300 + 40}$$
$$3600 + 60 = 3,660$$

(d)

$$6000 = 5990 + 10$$
$$2345 = \underline{2340 + 5}$$
$$3650 + 5 = 3655$$

Para obtener las respuestas correctas a los problemas (a), (b), (c) y (d) anteriores, quizás, los alumnos tengan que ensayar con varios nombres de la suma. En el problema (d), hay otras maneras de representar 6000, como, por ejemplo, 5 millares + 9 centenas + 9 decenas + 10 unidades es una forma más simple.

Esta exploración se resume en la página E313. Deben analizarla el maestro y los alumnos juntos. Los Conjuntos de problemas 10 y 11 pueden asignarse como tarea independiente.

En la página E 313, se da un algoritmo para la sustracción. Pronto, los alumnos aprenderán a hacer todas las reagrupaciones de una sola vez. Por ejemplo:

$$\begin{array}{cccc} & & \textcircled{12} & \\ & \textcircled{8} & \textcircled{7} & \textcircled{12} \\ & \not{9} & \not{3} & \not{7} \\ - & 2 & 6 & 8 \\ \hline & 6 & 6 & 4 \end{array}$$

E310

OTRO METODO PARA RESTAR

La sustracción es una operación con números. Cuando operamos con 15 y 3 y obtenemos 12, hemos restado. 15 - 3 = 12. 12 se llama el sumando desconocido.

Un ejercicio de sustracción se escribe en columnas para facilitarlo. Las columnas ayudan a mantener las unidades juntas, las decenas juntas, etc.

En la resta por columnas, las unidades se restan primero, luego las decenas, etc.

El darle un nuevo nombre a la suma en un ejercicio de sustracción puede ayudarnos a restar.

5576
- 1328

Para restar, pienso: No hay suficientes unidades en el lugar de las unidades en 5,576. Consideraré 5,576 como 5 millares, 5 centenas, 6 decenas y 16 unidades.
16 - 8 = 8. 6 - 2 = 4.
5 - 3 = 2. 5 - 1 = 4.
El sumando desconocido es 4,248.

Conjunto de problemas 8

Halla el sumando desconocido en cada uno de los problemas 1 y 2:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
1.	93	187	817	852	596
	38	99	748	575	378
	(55)	(88)	(69)	(277)	(218)
2.	5634	2876	8421	3124	5672
	1256	259	5167	2674	1489
	(4378)	(2617)	(3254)	(450)	(4183)

E311

Conjunto de problemas 9

1. En una semana, una fábrica montó 2,640 camiones y 1,582 automóviles. ¿Cuántos camiones más que automóviles se montaron? 2,640 - 1,582 = m o 1,582 + m = 2,640. Se montaron 1,058 más camiones que automóviles.)
2. En 1950, había 3,500 personas en Villa Verde. En 1960, había 9,400 personas en Villa Verde. ¿Cuántas personas más había en 1960 que en 1950? (9400 - 3500 = m o 3500 + m = 9400. En 1960, había 5900 personas más.)
3. Planeamos un viaje de 455 millas. El primer día, recorrimos 266 millas. ¿Cuántas millas nos quedaban por recorrer? (455 - 266 = m o 266 + m = 455. Nos quedaban 189 millas por recorrer.)
4. El río Misisipí tiene 2,348 millas de largo y el río Ohio tiene 981 millas de largo. ¿Cuántas millas más largo es el río Misisipí? (2,348 - 981 = m o 981 + m = 2,348. El río Misisipí es 1367 millas más largo.)
5. ¿Cuál es la longitud total de los ríos Misisipí y Ohio? (2,348 + 981 = m. La longitud total de los dos ríos es 3329 millas.)
6. En la ciudad de Nueva York, el edificio Empire State mide 1,472 pies de alto. El edificio Chrysler mide 1,046 pies de alto. ¿Cuánto más alto es el edificio Empire State? (1472 - 1046 = m o 1046 + m = 1472. El edificio Empire State es 426 pies más alto que el edificio Chrysler.)

7. Había 435 niños en la Escuela San Lucas y 379 niños en la Escuela Norteña. ¿Cuántos niños asisten a ambas escuelas? (435 + 379 = m. 814 niños asisten a ambas escuelas)

8. Un letrero en un puente para peatones dice: "No es seguro para más de 200 libras". Jaime pesa 62 libras, Diego pesa 57 libras, Tomás pesa 68 libras. ¿Pueden los tres niños transitar juntos con seguridad a lo largo del puente? (62 + 57 + 68 = m. Los tres niños juntos pesan 187. Como 187 es menos que 200, los tres niños pueden transitar juntos con seguridad a lo largo del puente)

9. Otro puente sostiene dos toneladas con seguridad. Un camión de cemento que pesa 2,165 libras está en el puente. ¿Cuántas libras más podrían estar al mismo tiempo en el puente con seguridad? (2,165 + m = 4,000 ó 4,000 - 2,165 = m. 1835 libras más podrían estar al mismo tiempo en el puente con seguridad.)

10. La abuela de Susana nació en 1908. ¿Qué edad cumplió en el año 1962? (1962 - 1908 = m ó 1908 + m = 1962. Cumplió 54 años en el 1962.)

E313

SUSTRACCION CON CEROS

1. ¿Cuáles de los siguientes son otros nombres para 8,000? (Todos, excepto el de la parte (a))

   (a) 8,000 unidades
   (b) 8,021 - 21
   (c) 800 decenas
   (d) 7,000 + 1,000
   (e) 800 centenas
   (f) 10,000 - 2,000
   (g) 8 millares
   (h) 8,000 - 0

2. Supongamos que tienes que hallar n cuando 8,000 - 1,732 = n. Puedes escribir el ejemplo como en el encasillado A. Hallar el sumando desconocido es fácil, si a 8,000 le das el nuevo nombre 799 decenas y 10 unidades o 7990 + 10.

A

$$\begin{array}{r} 8000 \\ -\ 1732 \end{array}$$

3. (a) Observa el ejemplo dado en el encasillado B.
   (b) Di cómo obtener el sumando desconocido, 6,260 + 8.
   (c) ¿Qué numeral decimal nombra el sumando desconocido?

B

$$\begin{array}{rl} 8000 &= 7990 + 10 \\ 1732 &= 1730 + \ \ 2 \\ & \overline{6260 + \ \ 8} \end{array}$$

Conjunto de problemas 10

Halla el sumando desconocido para cada uno de los siguientes:

1.

(a)	(b)	(c)	(d)
804	602	102	3001
267	536	85	1467
(537)	(66)	(17)	(1534)

2.

(a)	(b)	(c)	(d)
6000	3007	4803	2067
1234	1562	1297	1982
(4766)	(1445)	(3506)	(85)

Conjunto de problemas 11

1. Juan tiene 52 pulgadas de estatura; su padre tiene 70 pulgadas de estatura. ¿Cuántas pulgadas debe crecer Juan para ser tan alto como su padre? (52 + m = 70 ó 70 - 52 = m. Juan deberá crecer 18 pulgadas para ser tan alto como su padre.)
2. En la Escuela Hostos hay 500 niños y 375 niñas. ¿Cuántos niños más hay que niñas? (500 - 375 = m ó 375 + m = 500. Hay 125 más niños que niñas.)
3. Daniel tiene 1,500 sellos. Pegó 323 en su álbum. ¿Cuántos le quedan por poner en el álbum? (1500 - 323 = m ó 323 + m = 1500 Le quedan por poner en su álbum 1177 sellos.)
4. Susana tiene $25. Está ahorrando para comprar una bicicleta que cuesta $42. ¿Cuánto dinero más tiene que ahorrar? (25 + m = 42 ó 42 - 25 = m. Tiene que ahorrar $17 más.)
5. Un estadio tiene 5,200 asientos. Se han vendido 3,482 boletos para un juego. ¿Cuántos boletos quedan? (5,200 - 3,482 = m ó 3482 + m = 5,200. Quedan 1718 boletos.)
6. Un elefante de un zoológico pesa 5,000 libras. Un oso pesa 746 libras. ¿Cuánto menos pesa el oso que el elefante? (5,000 - 746 = m ó 746 + m = 5,000. El oso pesa 4,254 libras menos que el elefante.)
7. West Virginia se convirtió en un estado en 1863. Hawaii se convirtió en un estado en 1960. ¿Cuántos años más ha sido West Virginia un estado que Hawaii? (1863 + m = 1960 ó 1960 - 1863 = m. West Virginia ha sido un estado durante 97 años más que Hawaii.)

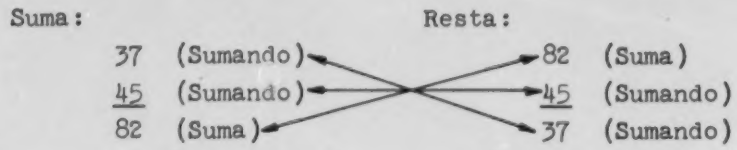
RELACION DE LAS TECNICAS DE LA ADICION Y LA SUSTRACCION

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a afianzar su comprensión de que la adición de un número y la sustracción de ese mismo número se neutralizan una u otra.

Materiales: Abaco

Exploración:

Aprendimos que la adición de un número y la sustracción de ese mismo número se neutralizan una a otra. Veamos si podemos indicar esto en un ábaco, mediante el siguiente ejemplo:

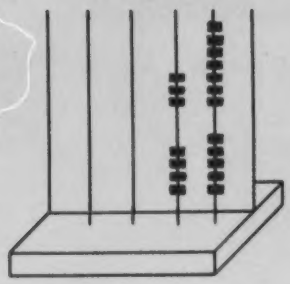


Los alumnos considerarán conveniente el uso de un ábaco para ver claramente que el razonamiento asociado con la "combinación" y "separación" de cuentas ilustra la idea de hacer y deshacer o neutralizar. En la Columna I de la página 546 se representa el enunciado $37 + 45 = 82$ en un ábaco. En la Columna II, se representa el enunciado $82 - 45 = 37$ en el ábaco. De igual manera, podemos representar en un ábaco los enunciados $45 + 37 = 82$ y $82 - 37 = 45$.

Ahora, consideremos la adición y la sustracción, sin utilizar un ábaco.

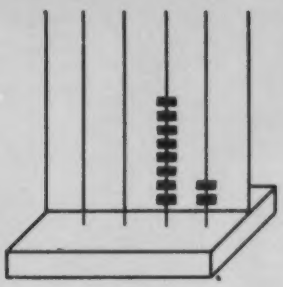
Sumar	Restar
37	82
45	45
82	37

Columna I

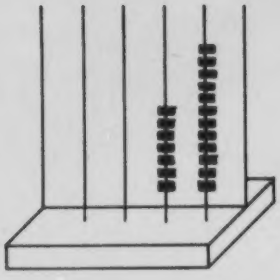


37 y 45

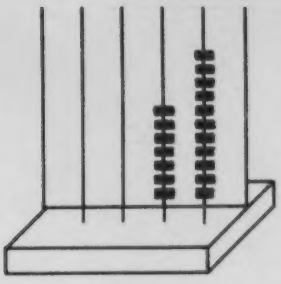
Columna II



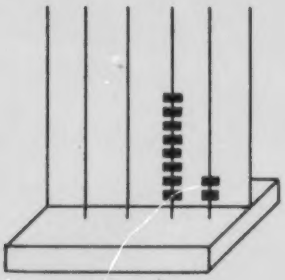
8 decenas y 2 unidades



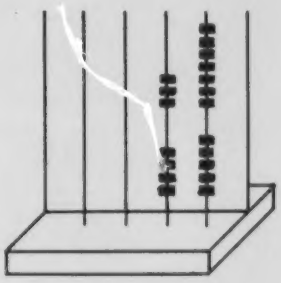
7 decenas y 12 unidades



7 decenas y 12 unidades



8 decenas y 2 unidades



8 decenas y 2 unidades

Ahora, pídase a los estudiantes que expliquen cómo restar un número neutraliza el sumar ese mismo número. Se obtiene la suma de dos sumandos. Restar de la suma uno cualquiera de los sumandos, da el otro.

Ahora, puede asignarse el Conjunto de problemas 12.

El Conjunto de problemas 13 se planeó para proporcionar práctica en diversas técnicas. Debe asignarse a los estudiantes que necesiten esa práctica.

E315

RELACION DE LAS TECNICAS DE LA ADICION Y LA SUSTRACCION

Conjunto de problemas 12

Copia la tabla que va a continuación. Suma o resta en cada ejercicio y, luego, neutraliza en cada caso:

Hacer			Neutralizar
1.	Suma	725 342 (1067)	1. (Resta 1067 − 342 = 725 ó 1067 − 725 = 342)
2.	Resta	1629 817 (812)	2. (Suma 817 + 812 = 1629)
3.	Resta	5232 768 (4464)	3. (Suma 768 + 4464 = 5232)
4.	Suma	5287 9388 (14,675)	4. (Resta 14,675 − 9,388 = 5,287 ó 14,675 − 5,287 = 9,388)
5.	Suma	26534 12986 (39,520)	5. (Resta 39,520 − 12,986 = 26,534 ó 39,520 − 26,534 = 12,986)

6. Demuestra que cada uno de estos enunciados matemáticos acerca de hacer y neutralizar es cierto. El primero se presenta como un ejemplo.

(a) (573 + 128) - 128 = 573

Respuesta: 573 + 128 = 701; 701 − 128 = 573

(b) (841 + 368) - 368 = 841

(c) (632 - 257) + 257 = 632

(d) (905 - 496) + 496 = 905

(e) (384 + 769) - 769 = 384

Respuestas

(b) 841 + 368 = 1209; 1209 − 368 = 841

(c) 632 − 257 = 375; 375 + 257 = 632

(d) 905 − 496 = 409; 409 + 496 = 905

(e) 384 + 769 = 1153; 1153 − 769 = 384

E316

7. La adición por columnas se puede <u>comprobar</u> usando las propiedades conmutativa y asociativa de la adición. En este ejemplo, primero "suma de arriba hacia abajo". Luego "suma de abajo hacia arriba". ¿Son las sumas las mismas? (Sí)
Suma:

43
32
<u>57</u>
(132)

Suma y comprueba los resultados en cada uno de los siguientes ejercicios:

8.
72
49
36
42
<u>88</u>
(287)

9.
324
964
322
<u>508</u>
(2118)

10.
3286
9246
3078
<u>5000</u>
(20,610)

11.
17208
15363
<u>42630</u>
(75,201)

12.
1492
3876
9547
3841
<u>2056</u>
(20,812)

13.
687
941
600
817
<u>932</u>
(3977)

14.
15618
29832
75490
61078
<u>70201</u>
(252,219)

15.
61429
78503
59268
68107
<u>91030</u>
(358,337)

16. PROBLEMA DIFICIL. Trata de hallar la suma para el ejercicio 8, sumando hacia abajo por columna una sola vez.

Conjunto de problemas 13

Copia en tu hoja de papel los numerales del 1 hasta el 7. Escribe las palabras correctas o numerales necesarios para completar la siguiente tabla:

	Números con los cuales se efectúa la operación	Resultado	Operación	Enunciado matemático
1.	394, 869	(1263)	adición	(394 + 869 = m)
2.	(762), (187)	(575)	(sustracción)	762 - (187) = 575
3.	498, (779)	1277	adición	(498 + m = 1277)
4.	(297 + 356), 495	(158)	sustracción	((297+356)-495=m)
5.	2000, (156 + 354)	(1490)	sustracción	(2000-(156+354)=m)
6.	(392 + 867), 201	(1058)	sustracción	((392+867)-201=m)
7.	(384), (979)	(1363)	(adición)	384 + 979 = (m)

En los ejercicios del 8 al 16, ¿qué es n, si cada enunciado matemático ha de ser cierto?

8. n = 67 + 48
   (n = 115)

9. n = 204 - 157
   (n = 47)

10. n = 4000 - 1963
    (n = 2037)

11. n + 42 = 89
    (n = 47)

12. 102 - n = 3
    (n = 99)

13. n - 128 = 568
    (n = 696)

14. n + 392 = 691
    (n = 299)

15. 601 - n = 399
    (n = 202)

16. 893 - n = 256
    (n = 637)

E318

17. **PROBLEMA DIFICIL.** En cada uno de los ejercicios siguientes, las letras **A, B, C, D y E** han de ser remplazadas por uno de los dígitos **0**, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 9. Pueden remplazarse por diferentes dígitos en diferentes ejercicios. Un símbolo tal como **AB** representa un numeral de 2 cifras.

47	63	47	DD (77)	CC (55)
+ 4	- A	+ D	+ E (3)	+ C (5)
A1	B8	CC	80	60
(51)	(58)	(55)		

ABC (195)	E4 (54)	BB (66)	7A (70)	CD (16)
- 42	+ 3C (33)	- B2 (62)	- AB (62)	+ D3 (63)
153	87	4	14	79

EL LENGUAJE DE LOS PROBLEMAS DE SUSTRACCION

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a conocer el lenguaje de los problemas cuya resolución matemática se obtiene mediante la sustracción.

Exploración:

Los alumnos deben darse cuenta de los diferentes tipos de problemas de aplicación práctica que pueden resolverse mediante la sustracción. La operación de sustracción se utiliza para hallar el sumando desconocido en casos como aquellos en los cuales tenemos que:
(1) comparar dos cantidades;
(2) determinar cuánto más se necesita;
(3) determinar cuánto sobra, etc.

¿Cómo pueden determinar cuándo deben restar para resolver un problema? Antes de contestar esta pregunta, deben estudiar algunos de los problemas que aparecen en la página E319 de sus libros.

(1) La familia A recorrió 323 millas y la familia B recorrió 289 millas, en un viaje de fin de semana. ¿Cuántas millas más recorrió la familia A que la familia B?

(2) La familia A recorrió 323 millas y la familia B recorrió 289 millas, en un viaje de fin de semana. ¿Cuántas millas recorrieron las dos familias?

(3) La familia A recorrió 323 millas y la familia B recorrió 289 millas, en un viaje de fin de semana. ¿Cuántas millas más hubiera tenido que recorrer la familia B para recorrer tantas millas como la familia A?

(4) Las familias A y B van juntas en un viaje de 323 millas. Han recorrido 289 millas. ¿Cuántas millas les quedan por recorrer?

Examinen la pregunta que se plantea en cada problema. Entonces, determinen qué información se da en cada uno y escriban un enunciado matemático, utilizando la información.

Resolvamos cada uno de los siguientes problemas con el método que hemos empleado.

(1) $n = 323 - 289$ ó $289 + n = 323$

$$\begin{array}{r} 323 \\ -\ 289 \\ \hline 34 \end{array}$$

La familia A recorrió 34 millas más que la familia B.

(2) $m = 323 + 289$

$$\begin{array}{r} 323 \\ +\ 289 \\ \hline 612 \end{array}$$

Las dos familias recorrieron 612 millas.

(3) $289 + p = 323$

o

$p = 323 - 289$

$$\begin{array}{r} 323 \\ -\ 289 \\ \hline 34 \end{array}$$

La familia B hubiera tenido que recorrer 34 millas más para recorrer tantar millas como la familia A.

(4) $s = 323 - 289$

o

$289 + s = 323$

$$\begin{array}{r} 323 \\ -\ 289 \\ \hline 34 \end{array}$$

A las familias A y B, les quedan 34 millas por recorrer.

¿En qué se parecen los problemas anteriores? (Los números en los problemas son los mismos.) ¿Son los problemas iguales? (No, son muy diferentes.) ¿En qué difieren? (Las preguntas planteadas son diferentes.)

Examinemos el trabajo que efectuaron para contestar las preguntas. ¿Se utilizaron operaciones diferentes? (Sí, en la pregunta (2) se sumó, en las otras se restó. ¿Cómo pudieron determinar qué operación utilizar? (Se pudo decidir, a base de la relación indicada en el problema.)

Podemos decir que un problema de adición es un problema en que se dan dos o más sumandos y se nos pide que obtengamos la suma. ¿Es el problema (2) de este tipo? (Sí, en él se dan los sumandos 323 y 289 y se pregunta cuántas millas recorrieron las dos familias.)

¿Cómo averiguaron que deberían restar en los otros problemas? Se pudo decidir, a base de la relación entre los números

indicada en el problema. ¿Cómo podemos describir un problema de sustracción? Se dan dos números, uno es la suma y el otro un sumando. Tenemos que determinar el sumando desconocido. En los problemas (1), (3) y (4), ¿qué número es la suma y qué número es el sumando conocido? (En los problemas (1), (3) y (4), la suma es .323 y el sumando conocido es 289.)

Dijimos que en un problema de sustracción, se da una suma y un sumando conocido. También, dijimos que en los problemas (1), (3) y (4) se da la misma suma y el mismo sumando. En este aspecto, los problemas son todos iguales, aunque en ellos se plantean preguntas diferentes.

Los alumnos deben redactar algunos problemas en los que se tenga que utilizar la sustracción. En algunos de esos problemas, debe pedirse que se comparen cantidades. Otros problemas deberán basarse en casos en los que haya que descomponer un conjunto en dos subconjuntos.

Ahora, puede asignarse el Conjunto de problemas 14. Los alumnos deberán emplear la forma indicada en la página 515 de este Comentario para escribir sus resoluciones.

E319

EL LENGUAJE DE LOS PROBLEMAS DE SUSTRACCION

1. La familia A recorrió 323 millas y la familia B recorrió 289 millas, en un viaje de fin de semana. ¿Cuántas millas más recorrió la familia A que la familia B?
2. La familia A recorrió 323 millas y la familia B recorrió 289 millas, en un viaje de fin de semana. ¿Cuántas millas recorrieron las dos familias?
3. La familia A recorrió 323 millas y la familia B recorrió 289 millas, en un viaje de fin de semana. ¿Cuántas millas más hubiera tenido que recorrer la familia B para recorrer tantas millas como la familia A?
4. Las familias A y B van juntas en un viaje de 323 millas. Han recorrido 289 millas. ¿Cuántas millas les quedan por recorrer?

Conjunto de problemas 14

1. Una libreta cuesta 15¢, un lápiz 27¢ y una goma 5¢. ¿Cuánto costará comprar un artículo de cada clase?
(15+27+5=m. Costará 47¢ comprar un artículo de cada clase.)
2. Cuatro niños juntaron sus ahorros para ayudar a comprar un caballo. María tenía $35, Jaime $48, Diana $123 y Francisco $97. ¿Cuánto dinero tenían los cuatro niños?
(35+48+123+97=m. Los cuatro niños tenían $303.)

3. Un campo de juego tiene 300 pies de largo y 160 de ancho. ¿Qué distancia recorres, si caminas a lo largo de los cuatro lados del campo? (300+160+300+160 = m. Se recorren 920 pies, si se camina a lo largo de los cuatro lados del campo.)

4. Juan tiene 268 sellos de correo. Recibió algunos para Navidad. Tiene, ahora, 323. ¿Cuántos recibió para Navidad? (268+m=323 ó 323-268=m. Para Navidad, recibió 55 sellos.)

5. En Bella Vista, la temperatura era 58° al medio día y 23° a la media noche. ¿Cuánto cambió la temperatura? (58-23=m ó 23+m=58. La temperatura cambió 35°.)

6. Tomás deseaba comprar una radio que tenía un precio de $72. Tenía ahorrados $56. ¿Cuánto más tenía que ahorrar? (56+m=72 ó 72-56=m. Tomás tenía que ahorrar $16 más.)

7. En una página de un catálogo, se dieron los siguientes precios: pelota, $1; bate, $3; guante de lanzador, $3; guante de receptor, $12; guante de primera base, $9; careta del receptor, $4; y uniforme de béisbol, $6. ¿Cuánto le costará al Sr. López comprar una pelota, un bate y tres uniformes para sus hijos? (1+3+6+6+6=m. Le costará $22.)

8. En un año, la Acme Motor Company fabricó 969,732 automóviles, 95,060 camiones y 17,747 patinetas de motor. Halla el número de vehículos que la Acme Motor Company fabricó en aquel año. (969,732+95,060+17,747=m. La Acme Motor Company fabricó 1,082,539 vehículos en aquel año.)

S3

RAZONAMIENTO EN LA FORMA SI-ENTONCES

Objetivo: Presentar a los estudiantes uno de los procedimientos para llegar a conclusiones válidas: el razonamiento en la forma "si-entonces".

Vocabulario: Razonamiento en la forma si-entonces

Exploración:

La exploración correspondiente a este tema aparece en la página E321. El maestro debe recalcar la importancia del razonamiento en la forma "si-entonces". El matemático supone ciertas relaciones y las presenta en la parte "si" del enunciado. Después, llega a conclusiones válidas que incluye en la parte "entonces" del enunciado. El maestro proporciona más ejemplos de razonamiento en la forma si-entonces, algunos correctos y otros incorrectos. Después, los alumnos pueden presentar sus propios ejemplos. Deben utilizarse ejemplos que traten sobre matemática y ejemplos que traten sobre asuntos de la vida diaria.

Si algún alumno dice: "Si $n + 9 = 15$, entonces, $9 + n = 15$" o "Si $n + 9 = 15$, entonces, $15 - n = 9$", el maestro debe pedirle que dé las razones para su afirmación.

Asígnese, ahora, el Conjunto de problemas 15 como tarea independiente. Después que los alumnos lo hayan completado, puede asignarse el Conjunto de problemas 16. En este último conjunto, los cuadrados mágicos resultan ser una manera muy interesante de practicar con las ideas estudiadas.

557 S1

E321

RAZONAMIENTO EN LA FORMA SI-ENTONCES

1. A menudo, usamos la forma de razonamiento "si-entonces". Por ejemplo, puedes pensar:

   "Si voy a casa corriendo, entonces llegaré más pronto" o

   "Si llueve, entonces no podemos jugar béisbol".

   Escribe algunos "enunciados de la forma "si-entonces" acerca de tu vida diaria.

2. En nuestros enunciados en la forma si-entonces, queremos que la segunda parte sea cierta en virtud de la primera parte.

3. Usamos el razonamiento en la forma "si-entonces", cuando razonamos:

   "Si $7 + n = 15$, entonces $n + 7 = 15$" o

   "Si $7 + n = 15$, entonces $n = 8$".

   No pensaríamos

   "Si $3 + 6 = 9$, entonces $3 + 6 = 10$, puesto que la parte del "entonces" no es un resultado de la parte "si".

   Pudimos pensar, "Si $3 + 6 = 9$, entonces $3 + 7 = 10$".

   Completa este enunciado de otras maneras: Si $3 + 6 = 9$, entonces ... ($6+3=9$, $3+7=10$, etc.)

4. (a) ¿Será cierto que "Si $n + 6 = 15$, entonces $n = 15 - 6$"? (sí)

   (b) ¿Será cierto que "Si $n - 6 = 10$, entonces $n = 10 + 6$"? (sí)

Conjunto de problemas 15

1. Completa los siguientes enunciados; utiliza varias maneras diferentes para completar cada uno según puedas: (Hay varias respuestas posibles.)

   (a) Si $15 - 9 = n$, entonces ...
   (b) Si $13 + n = 21$, entonces ...
   (c) Si $33 = 17 + n$, entonces ...
   (d) Si $11 + n - 25$, entonces ...
   (e) Si $12 + n = 19$, entonces ...
   (f) Si $n - 15 = 14$, entonces ...

2. Utiliza uno de los símbolos $=$, $>$ o $<$ de manera que cada uno de estos enunciados matemáticos sea cierto:

   (a) Si $n + 6 = 17$, entonces n (<) 17.
   (b) Si $21 - n = 19$, entonces n (<) 21.
   (c) Si $44 = n + 27$, entonces n (<) 44.
   (d) Si $n - 16 = 31$, entonces n (>) 16.
   (e) Si $n + n = 40$, entonces n (<) 40.
   (f) Si $n + 0 = 178$, entonces n (=) 178.
   (g) Si $0 - n = 0$, entonces n (=) 0.
   (h) Si $(6 + 8) + n - 19$, entonces n (<) 19.

3. PROBLEMA DIFICIL. Recuerda: x, y, z representan números cardinales. Suponte que $x + y = z$.

   (a) ¿Estás seguro de que $x < z$ y, también, $y < z$? (Sí, excepto cuando $x = 0$, $y = 0$ & $y = 0$.)
   (b) Da un ejemplo para $x = z$. (Si $x = y$, entonces $y = 0$.)
   (c) Da un ejemplo para $x < z$. (Si $x < y$, entonces $y < y$. Hay varias respuestas posibles.)
   (d) Da un ejemplo para $x < z$ e $y < z$. (Hay varias respuestas posibles.)
   (e) ¿Podría ser cierto el enunciado $x > z$? (No)

Conjunto de problemas 16

La disposición o arreglo de números en el cuadrado de la derecha se llama un cuadrado mágico.

	A	B	C
D	4	3	8
E	9	5	1
F	2	7	6

1. ¿Cuál es la suma de los números en la columna A? (15) ¿En la columna B? (15) ¿En la columna C? (15)
2. ¿Cuál es la suma de los números en la fila D? (15) ¿En la fila E? (15) ¿En la fila F? (15)
3. El 4, 5 y 6 se dice que están en una diagonal. ¿Cuál es su suma? (15) ¿Qué otros tres numerales están en una diagonal? (8, 5, 2) ¿Cuál es su suma? (15)
4. ¿Son las ocho sumas la misma? (Sí) Se dice que el cuadrado es "mágico", porque las sumas de todas las filas, columnas y diagonales son iguales.
5. Forma un nuevo cuadrado, sumando 19 a cada número del cuadrado anterior. ¿Cuál es la suma de los números en: cada fila?; (72) cada columna?; (72) cada diagonal? (72) ¿Es el nuevo cuadrado un cuadrado mágico? (Sí)

23	22	27
28	24	20
21	26	25

6. ¿Es el cuadrado de la derecha un cuadrado mágico? (Sí) ¿Cuál es la suma de los números en cada fila, cada columna y cada diagonal? (254)

71	57	58	68
60	66	65	63
64	62	61	67
59	69	70	56

7. Forma un nuevo cuadrado, restando 49 de cada número en el cuadrado en el ejercicio 6. ¿Es el nuevo cuadrado mágico? (Sí)

22	8	9	19
11	17	16	14
15	13	12	18
10	20	21	7

REPASO

Objetivo: Ayudar a los alumnos a repasar los conceptos y procedimientos para la resolución de problemas estudiados en esta unidad.

Sugerencias para la enseñanza:

En esta sección, se incluyeron tres conjuntos de problemas. El Conjunto de problemas 17 sirve como un repaso de las técnicas; se incluyen en él algunos Problemas difíciles para los estudiantes sobresalientes. El Conjunto de problemas 18 consiste en problemas en forma de cuento y de Problemas difíciles. Deben utilizarse los métodos de resolver problemas analizados anteriormente.

El Conjunto de problemas 19 tiene el propósito de acostumbrar a los estudiantes a elegir la información esencial en un párrafo y utilizarla para contestar la pregunta. En ciertos ejercicios, se da el enunciado matemático y los alumnos deben escribir la pregunta que se contesta mediante el enunciado. Esto es lo inverso de los problemas que han resuelto hasta ahora en los que se les pedía que contestaran una pregunta y que escribieran el enunciado matemático que la describía. Para ampliar este propósito, se les puede pedir que ideen problemas que se resuelvan mediante la adición o la sustracción.

Los alumnos no tienen que resolver cada uno de los problemas. Se proporciona un número grande de problemas para que el maestro pueda asignar tareas adecuadas a la habilidad de cada alumno. Al mismo tiempo, estos conjuntos de problemas no son enteramente un repaso. Hay algunas variaciones respecto del contenido estudiado anteriormente. Deben analizarse en clase algunos de los problemas más difíciles y los métodos para resolverlos.

Notas acerca de los Problemas difíciles:
1. En el problema 7, de la página E325, los alumnos deben tratar de remplazar n con varios números, en los enunciados $n + n = 200$ y $n + n = 582$.

2. En el problema 10, de la página E325, se puede determinar el valor de n en el enunciado matemático $n - 376 = 89$, porque 376 y 89 son sumandos y la adición es siempre posible dentro del conjunto de los números cardinales. Sin embargo, en $n + 376 = 89$, no hay número cardinal alguno que sea el valor de n, porque $n = 89 - 376$. No siempre es posible restar dentro del conjunto de los números cardinales.

E324

REPASO

Conjunto de problemas 17

1. Resta

84	126	536	1427	1674
57	67	239	1148	555
(27)	(59)	(297)	(279)	(1119)

2. Suma

67	134	257	3782	2841
84	29	489	6356	7159
(151)	(163)	(746)	(10,138)	(10,000)

3. Halla n de manera que cada enunciado matemático sea cierto:

(a) $81 - 46 = n$ (n = 35)

(b) $n = 76 + 49$ (n = 125)

(c) $n + 126 = 253$ (n = 127)

(d) $n - 87 = 123$ (n = 210)

(e) $359 - n = 284$ (n = 75)

(f) $283 + n = 481$ (n = 198)

4. ¿Cuáles de estos enunciados matemáticos no son ciertos?

(a) $81 + 69 = 160$ (F)

(b) $124 + 238 = 362$ (C)

(c) $289 + 463 = 752$ (C)

(d) $1276 - 493 = 783$ (C)

(e) $263 = 612 - 350$ (F)

(f) $412 = 913 - 571$ (F)

5. Escribe uno de los símbolos $=$, $>$ o $<$, de manera que cada enunciado matemático sea cierto:

(a) 825 (=) 568 + 257

(b) 289 + 482 (>) 761

(c) 742 - 367 (>) 374

(d) 538 - 289 (<) 259

6. PROBLEMA DIFICIL. ¿Qué número cardinal, si alguno, puede usarse para n de manera que cada enunciado matemático sea cierto?

(a) $192 + n = 168$ (Ninguno) (e) $n - 12 = 26$ ($n = 38$)

(b) $192 + n = 268$ ($n = 76$) (f) $12 - n = 26$ (Ninguno)

(c) $312 - n = 214$ (Ninguno) (g) $26 - 21 = n$ ($n = 5$)

(d) $312 - n = 310$ ($n = 2$) (h) $21 - 26 = n$ (Ninguno)

7. PROBLEMA DIFICIL.

(a) Los dos números con los cuales se efectúa la operación son n y n. La operación que empleas es la adición. El resultado es 200. ¿Qué número es n? ($n + n = 200$. $n = 100$)

(b) Sigue las instrucciones del ejercicio (a), pero remplaza 200 con 582. ($n + n = 582$. $n = 291$)

8. PROBLEMA DIFICIL. ¿Qué está mal en este problema?: Los dos números con los cuales efectúas la operación son n y n. La operación que empleas es la sustracción. El resultado es 10. ¿Qué número es n? (Si el enunciado fuera cierto, tendríamos $n - n = 10$. Sabemos que el enunciado es falso porque $n - n = 0$ ó $n - n \neq 10$.)

9. PROBLEMA DIFICIL. Dos números con los cuales se efectúa la operación son n y 376. El resultado es 593. Escribe dos enunciados matemáticos ciertos, utilizando n, 376 y 593. En cada enunciado matemático, n será un número diferente. ($n + 376 = 593$, $n = 217$; $n - 376 = 593$, $n = 969$)

10. PROBLEMA DIFICIL. Dos números con los cuales se efectúa la operación son n y 376. El resultado es 89. ¿Puedes escribir uno o dos enunciados matemáticos ciertos utilizando n, 376 y 89? ¿Por qué? ($n - 376 = 89$, $n = 465$; $376 - n = 89$, $n = 287$)

El enunciado $n + 376 = 89$ sería un enunciado falso, pues no hay número cardinal alguno tal que $n = 89 - 376$. La sustracción no es siempre posible en el conjunto de los números cardinales.)

Conjunto de problemas 18

1. Un modelo de avión cuesta $2.15. José tenía algún dinero y, además, ganó $1.58. Entonces, tenía exactamente para comprar el avioncito. ¿Cuánto tenía, antes de ganar $1.58? (m + 158 = 215 o 215 - 158 = m. Antes de ganar $1.58, tenía 57¢.)

2. La clase de cuarto grado recogió 287 libras más de periódicos viejos que la clase de quinto grado. La clase de cuarto grado recogió 512 libras. ¿Cuánto recogió el quinto grado? (512 - 287 = m o m + 287 = 512. La clase de quinto grado recogió 225 libras de periódicos viejos.)

3. 721 es el número mayor de 3 dígitos que puede escribirse, utilizando cada uno de los dígitos 7, 2 y 1. ¿Cuál es el número menor que puede escribirse? (127) ¿Cuánto debe sumarse al número menor para obtener el mayor? (127 + m = 721 ó 721 - 127 = m)

4. María fue a la tienda a comprar una libra de pan y una docena de huevos. El pan cuesta 29¢ la libra y los huevos 65¢ la docena. Utilizando solamente la información anterior, ¿cuáles de estas preguntas puedes contestar?

   (a) ¿Cuál es el costo de las compras de María? (29 + 65 = m. El costo es 94 centavos.)

   (b) ¿Cuánto pagó en total María por el pan? (29 ¢)

   (c) ¿Cuánto cambio trajo a la casa? (No sabemos cuánto dinero tenía.)

   (d) Si dio al dependiente un billete de $5, ¿cuánto cambio recibió? (94 + m = 500 ó 500 - 94 = m. Recibió 406 centavos, o sea, $4.06 de cambio.)

E327

5. La Escuela del Este organizó una campaña de periódicos y revistas. La clase A recogió 1,546 libras, la clase B recogió 2,875 libras, y la clase C recogió 5,324 libras. ¿Cuántas libras de papel recogieron las tres clases juntas? (1546 + 2875 = 5324 = m. Las tres clases recogieron 9,745 libras.)

6. PROBLEMA DIFICIL. Utiliza los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 para formar un cuadrado mágico. Sugerencia: la suma de cada fila, de cada columna, y de cada diagonal deberá ser 18.

(| 5 | 4 | 9 |
 | 10 | 6 | 2 |
 | 3 | 8 | 7 | o | 9 | 2 | 7 |
 | 4 | 6 | 8 |
 | 5 | 10 | 3 |)

7. PROBLEMA DIFICIL. (a) ¿Qué número es n, si $(6 - n) + 4 = (6 + n) - 4$? (m = 4)

   (b) ¿Cuántos números naturales hay entre 194 y 275? (80)

8. PROBLEMA DIFICIL. Cada enunciado matemático a continuación es cierto. ¿En cuál no es n un número cardinal? (d)

   (a) $n - n = n$ (m = 0)

   (b) $10 - n = n$ (m = 5)

   (c) $(3 + 2) + 2 = n$ (m = 7)

   (d) $(3 + 2) + n = 2$ (m no es un número cardinal)

9. PROBLEMA DIFICIL. Halla n de manera que cada enunciado matemático sea cierto.

   (a) n es menor que 2. (m = 0 o m = 1)

   (b) n es menor que 8 y n es mayor que 6. (m = 7)

   (c) n sumado a 3 es menor que 5. (m = 0 o m = 1)

   (d) $n < 12$ y $n > 10$ (m = 11)

   (e) $n + 4 < 6$ (m = 0 o m = 1)

E328

Conjunto de problemas 19

En la Escuela Sócrates, la cafetería sirvió almuerzos a:

195 niños el lunes
218 niños el martes
198 niños el miércoles
203 niños el jueves
194 niños el viernes

Utiliza esta información para resolver los problemas del 1 al 8.

1. ¿A cuántos niños se les sirvió almuerzo durante la semana? (195 + 218 + 198 + 203 + 194 = n. Se les sirvió almuerzo a 1008 niños durante la semana.)
2. ¿Cuántos almuerzos se sirvieron durante la semana en exceso de 1,000? (1008 - 1000 = n o 1000 + n = 1008. Se sirvieron 8 almuerzos en exceso de 1,000 durante la semana.)
3. Halla los dos días en los cuales se sirvió el mayor número de almuerzos. ¿Cuánto menor que 500 fue el número de almuerzos para estos dos días? (500 - (218 + 203) = n. El número de almuerzos para estos dos días fue 79 menor que 500.)
4. ¿Cuánto más que el número total de almuerzos servidos en los últimos dos días de la semana es el número total de almuerzos servidos en los tres primeros días de la semana? (195 + 218 + 198) - (203 + 194) = n. En los primeros tres días de la semana, se sirvieron 214 almuerzos más que en los últimos dos días de la semana.)

Los enunciados matemáticos en los ejercicios 5 al 8 contestan preguntas acerca de los almuerzos servidos. ¿Qué preguntas?

5. $195 + n = 218$
(¿Cuánto más que el número de almuerzos servidos el lunes es el número de almuerzos servidos el martes?)

6. $n = 198 + 194$
(¿Cuántos almuerzos se sirvieron el miércoles y el viernes?)

7. $(198 + 203) + 194 = n$
(¿Cuál fue el número total de almuerzos servidos en los últimos tres días de la semana?)

8. $218 - 203 = n$
(¿Cuánto más que el número de almuerzos servidos el jueves es el número de almuerzos servidos el martes?)

E329

Los precios de algunos juegos de cartas son: Old Maid 26¢, Hearts 19¢, Play Your Hunch 17¢, y Rummy 24¢.

¿Cuáles de los enunciados matemáticos en el encasillado pueden usarse para contestar los ejercicios del 9 al 11?

(a)	100 + n = 17 + 19
(b)	(19 + 24) - 26 = n
(c)	(24 + 19) + 26 = n
(d)	n - (19 + 24) = 26
(e)	100 - (17 + 19) = n
(f)	(24 + 19) - n = 26

9. ¿Cuál es el costo total de Rummy, Hearts y Old Maid? (c)

10. ¿Cuánto cambio recibes de $1, si compras Play Your Hunch y Hearts? (e)

11. ¿Cuánto más costará comprar los dos juegos Hearts y Rummy que 1 juego de Old Maid? (b) o (f)

Los enunciados matemáticos en los ejercicios del 12 al 17 contestan preguntas acerca del costo de los juegos de cartas. ¿Qué preguntas?

12. 17 + 24 = n
(¿Cuál es el costo total de Play your Hunch y Rummy?)

13. n = 19 - 17
(¿Cuánto más cuesta el juego de Hearts que el de Play Your Hunch?)

14. 24 - n = 17
(¿Cuánto mayor es el costo de Rummy que el de Play Your Hunch?)

15. n + 26 = 19
(No hay número cardinal alguno que haga cierto este enunciado.)

16. n = 17 + 26
(¿Cuál es el costo total de Play your Hunch y Old maid?)

17. 17 + n = 24
(¿Cuánto mayor es el costo de Rummy que el de Play your Hunch?)

AMPLIACION

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a repasar y ampliar sus conocimientos acerca de los conceptos de reunión e intersección de conjuntos. Ayudarlos a entender el significado de una operación con números:

Vocabulario: Las palabras circ, bow, wob, estrella, beta, pick y alfa se emplean sin ningún significado en el Conjunto de problemas 20. No nos proponemos que formen parte del vocabulario de los alumnos.

Exploración:

El maestro deberá examinar detenidamente los Conjuntos de problemas 20 y 21 y decidir a cuáles de sus alumnos les convendría estudiar este material complementario.

En relación con el Conjunto de problemas 21, que trata sobre la reunión de conjuntos, el maestro puede referirse al Capítulo 3 para hallar una base matemática y sugerencias para la enseñanza.

Debido a que los alumnos están familiarizados con la adición y la sustracción, con frecuencia, no se dan cuenta de lo que significa decir qué son operaciones. En el Conjunto de problemas 20, se introducen algunas operaciones imaginarias para ayudarlos a comprender lo que se entiende por una operación.

El Conjunto de problemas 20 se planeó para que los alumnos tuvieran la oportunidad de descubrir las reglas de operaciones imaginarias. El maestro debe tratar de que esta lección resulte un juego. A los alumnos, puede llamárseles descubridores o inventores. El maestro puede utilizar la sección del Texto del estudiante como base para el estudio de este tema o puede utilizar la siguiente explicación como introducción, antes de abrir los libros:

Hoy vamos a inventar algo. Inventaremos algunas operaciones imaginarias y algunos símbolos para representarlas. Primero, nombren las operaciones matemáticas que conocen. (Adición, sustracción, multiplicación y división) Escriban el símbolo para cada una de esas operaciones en la pizarra.

La operación imaginaria que he inventado se representa con el símbolo $\square$. Ayúdenme a idear un nombre para ella. (Los alumnos podrían sugerir "caja" o "rectángulo". Elíjase un nombre raro, como "rect".)

"Rect" es una operación con dos números. El resultado de efectuar la operación rect se obtiene mediante la siguiente regla: "Añádase 2 a la suma de los números. Así, $4 \square 3 = 9$ y $1 \square 5 = 8$. Digan cuál es el resultado de $6 \square 3$, de $2 \square 3$, y de $6 \square 7$. (11, 7, 15)

Procúrese que los alumnos piensen en un símbolo y en una regla para la operación que el símbolo representa.

Este es otro símbolo que representa una operación. (Escríbase el símbolo $\sim$ en la pizarra.) El nombre de la operación es "nac". Es una operación con dos números. Examinemos algunos enunciados matemáticos en los que se emplea $\sim$:

$3 \sim 1 = 3$ $\quad$ $5 \sim 7 = 11$ $\quad$ $4 \sim 9 = 12$

¿Cuántos de ustedes pueden obtener $2 \sim 4$?

Escríbanse algunos enunciados como $1 \sim 1 =$ ___ y $6 \sim 2 =$ ___ en la pizarra. Pídase a los alumnos que han descubierto la regla que den los resultados. (El símbolo $\sim$ significa "réstese 1 de la suma de dos números".) Después que algunos de los alumnos hayan descubierto la regla, pídase que uno de ellos la enuncie con palabras.

En el Texto del estudiante, hay otros ejemplos como los anteriores.

Si el maestro decide que unos pocos estudiantes solamente deben estudiar el Conjunto de problemas 20, éstos pueden hacerlo independientemente.

E330

AMPLIACION

Conjunto de problemas 20

Significado de la operación

Has estudiado la adición y la sustracción, dos de las operaciones de la matemática. Son operaciones con dos números. Los símbolos que indican estas operaciones son + y - . Ahora vamos a "construir" algunas operaciones. Son operaciones "imaginadas" y no se encuentran en los libros de matemáticas. Se han inventado para ver si puedes descubrir su significado.

1. Una operación "imaginada" se llama "circ". El símbolo para indicar circ es ● . 2 ● 4 se lee, "Dos circ cuatro". Circ significa sumar 3 al primer número y luego restar el segundo número de aquella suma. Así, 2 ● 4 = 1. Halla n en cada uno de los siguientes ejercicios:

   (a) 3 ● 2 = n (n=4)

   (b) 8 ● 1 = n (n=10)

   (c) 5 ● 1 = n (n=7)

   (d) 4 ● 4 = n (n=3)

   (e) 7 ● 6 = n (n=4)

   (f) 9 ● 2 = n (n=10)

2. Otra operación "imaginada" se llama "bow". El símbolo para indicar bow es T . 3 T 4 se lee, "Tres bow cuatro". Bow quiere decir elegir el número más pequeño. Así, 8 T 5 = 5. Halla n en cada uno de los siguientes ejercicios:

   (a) 2 T 3 = n (n=2)

   (b) 12 T 8 = n (n=8)

   (c) 4 T 1 = n (n=1)

   (d) 9 T 10 = n (n=9)

   (e) 8 T 3 = n (n=3)

   (f) 7 T 6 = n (n=6)

3. Otra operación se llama "wob". El símbolo para indicar wob es $\perp$. 3 $\perp$ 4 se lee, "tres wob cuatro". He aquí algunos resultados de la operación wob con dos números; trata de hallar el significado de wob: (wob significa elegir el número mayor.)

(a) 4 $\perp$ 6 = 6 (d) 2 $\perp$ 6 = 6

(b) 8 $\perp$ 0 = 8 (e) 5 $\perp$ 9 = 9

(c) 8 $\perp$ 1 = 8 (f) 7 $\perp$ 7 = 7

Halla n en cada uno de los siguientes ejercicios:

(g) 5 $\perp$ 6 = n (n=6) (j) 6 $\perp$ 8 = n (n=8)

(h) 1 $\perp$ 9 = n (n=9) (k) 2 $\perp$ 0 = n (n=2)

(i) 7 $\perp$ 10 = n (n=10) (l) 9 $\perp$ 2 = n (n=9)

4. El símbolo * va a ser un signo de operación. 3 * 4 indica una operación efectuado con 3 y 4 de cierta manera. Se lee, "Tres estrella cuatro". He aquí algunos resultados de la operación, estrella, con dos números; trata de hallar el significado de estrella: (Estrella significa añadir 1 a la suma.)

(a) 3 * 4 = 8 (d) 3 * 7 = 11

(b) 5 * 6 = 12 (e) 1 * 1 = 3

(c) 2 * 6 = 9 (f) 5 * 4 = 10

Halla n en cada uno de los siguientes ejercicios:

(g) 2 * 4 = n (n=7) (j) 5 * 9 = n (n=15)

(h) 8 * 7 = n (n=16) (k) 1 * 0 = n (n=2)

(i) 3 * 6 = n (n=10) (l) 1 * 6 = n (n=8)

5. Otra operación se llama "pick". El símbolo para pick es ⌋ . Trata de encontrar el significado de ⌋ mediante los siguientes ejemplos: (Pick significa dividir la suma por 2.)

(a) 3 ⌋ 5 = 4 (d) 8 ⌋ 6 = 7

(b) 0 ⌋ 2 = 1 (e) 7 ⌋ 5 = 6

(c) 0 ⌋ 2 = 1 (f) 9 ⌋ 7 = 8

6. Otra operación se llama "alfa". El símbolo para alfa es α . Es una operación con un número. Trata de hallar el significado de α mediante los siguientes ejemplos: (Alfa significa duplicar el número.)

(a) α 3 = 6 (c) α 5 = 10

(b) α 0 = 0 (d) α 8 = 16

¿Qué es n en cada uno de los siguientes enunciados:

(e) α 4 = n (n=8) (g) α 1 = n (n=2)

(f) α 9 = n (n=18) (h) α 7 = n (n=14)

7. PROBLEMA MUY DIFICIL. Otra operación se llama "beta". El símbolo para indicar beta es β . Trata de hallar el significado de beta mediante los siguientes ejemplos: (Beta significa restar de 12 la suma de los dos números.)

(a) 3 β 4 = 5 (d) 7 β 5 = 0

(b) 1 β 2 = 9 (e) 6 β 1 = 5

(c) 2 β 8 = 2 (f) 3 β 3 = 6

Halla n en cada uno de los siguientes ejercicios:

(g) 2 β 3 = n (n=7) (j) 4 β 2 = n (n=6)

(h) 8 β 4 = n (n=0) (k) 1 β 0 = n (n=1)

(i) 5 β 6 = n (n=1) (l) 5 β 5 = n (n=2)

8. PROBLEMA MUY DIFICIL. ¿Para cuáles de las operaciones en los ejercicios del 1 al 7 parece válida la propiedad conjutativa? (bow, web, estrella, pick, beta)

Conjunto de problemas 21

REUNION DE CONJUNTOS

Suponte que tienes el conjunto A y el conjunto B.

Llama al conjunto C la intersección de los conjuntos A y B.

Llama al conjunto D la reunión de los conjuntos A y B.

Copia y llena la siguiente tabla: (Puede que necesites dibujar algunas figuras.)

	Número de elementos del conjunto A	Número de elementos del conjunto B	Número de elementos del conjunto C (Intersección)	Número de elementos del conjunto D (Reunión)
(1)	7	8	0	15
(2)	7	8	2	13
(3)	7	9	4	(12)
(4)	8	3	0	(11)
(5)	8	3	n	(11 - n)
(6)	8	m	0	(8 + m)
(7)	p	r	2	((p+r)-2)
(8)	p	r	5	((p+r)-5)

Capítulo 7

TECNICAS DE LA MULTIPLICACION Y LA DIVISION

PROPOSITOS DE LA UNIDAD

1. Ayudar a los estudiantes a entender las técnicas de la multiplicación y la división. (En esta unidad, el proceso de la división incluye división sin residuo y con residuo.)

2. Ayudar a los estudiantes a comprender que pueden multiplicar y dividir números grandes, si conocen las combinaciones básicas de la multiplicación y las propiedades de la multiplicación y la división.

3. Ayudar a los estudiantes a desarrollar destreza en el uso de los procesos de la multiplicación y la división y en la comprobación de los resultados de estos procesos (No se espera que los alumnos adquieran un alto grado de destreza hasta que se haya estudiado el Capítulo 3 del texto para quinto grado.)

4. Ayudar a los alumnos a mejorar su habilidad para la resolución de problemas, mediante el uso de enunciados matemáticos en casos que sugieren multiplicación o división.

BASE MATEMATICA

En esta unidad, aprenderemos el empleo de las propiedades de la multiplicación y la división (como se estudiaron en el Capítulo 4) en el desarrollo de las técnicas para multiplicar y dividir números cardinales.

Para lograrlo, utilizamos las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación, la propiedad distributiva, las propiedades especiales del 0 y el 1, el sistema de numeración decimal y las combinaciones básicas de la multiplicación en la determinación del producto de números mayores que 9 y en la expresión de un número como un múltiplo de otro.

El proceso de la multiplicación. Hemos asociado el número $a \times b$ con una disposición de a filas y b columnas. Asociamos el número 3×4 con una disposición de 3 filas y 4 columnas. Como 3×4 no es una forma corriente de expresar un número natural, podemos establecer una correspondencia entre los elementos del conjunto y los elementos de conjuntos familiares, apareando este conjunto particular con un conjunto que tenga la propiedad numérica 12. Entonces, podemos designar al número del conjunto con 3×4 o con 12. En $3 \times 4 = 12$, llamamos 12 al producto de 3 y 4. Decimos que 3 y 4 son factores de 12.

Para obtener el producto de 7 y 24, podemos expresar primero 24 como $20 + 4$. Entonces, pensamos en el numeral decimal para 7×24, utilizando el numeral decimal para 7×20 ó $(7 \times 2) \times 10$ y el numeral decimal que expresa el mismo número que (7×4). La explicación siguiente sugiere diferentes modelos de razonamiento para obtener el número n que aparece en el enunciado

$$7 \times 24 = n.$$

Podemos asociar primero este número con una disposición, como se muestra en la figura 1. $(7 \times 20) = 140$ y $7 \times 4 = 28$.

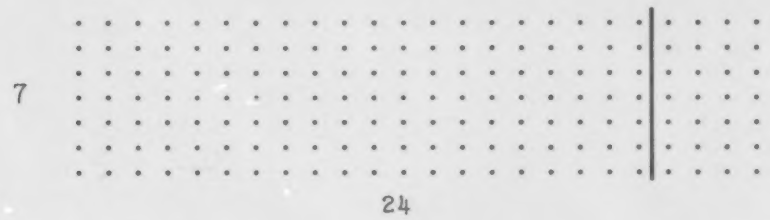


Figura 1

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 7 \\ \hline \end{array} \quad \text{puede escribirse como} \quad \begin{array}{r} 20 + 4 \\ \times\ 7 \\ \hline 140 + 28 = 168 \end{array}$$

o, también así,

$$\begin{array}{rll} 24 & & \\ \times\ 7 & & \\ \hline 140 & (7 \times 20) \text{ ó } (7 \times 2) \times 10 & \\ 28 & (7 \times 4) & \\ \hline 168 & & \end{array}$$

o así,

$$\begin{array}{rl} 24 & \\ \times\ 7 & \\ \hline 28 & (7 \times 4) \\ 140 & (7 \times 20) \\ \hline 168 & \end{array}$$

o, si podemos recordar las "2 decenas" y sumarlas a las "14 decenas"; entonces, podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 7 \\ \hline 168 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 7 \times 4 = 20 + 8 \\ 7 \times 20 = 140 \end{array} \qquad 140 + 20 + 8 = 168$$

La forma que se utilice depende del grado de destreza que se haya adquirido. Se espera que un alumno que está aprendiendo a multiplicar vaya adquiriendo cada vez más destreza.

Estos procedimientos pueden utilizarse para determinar productos de pares de números más grandes. Sin embargo, el proceso de razonamiento y la escritura de los pasos son más complejos.

Supongamos que tenemos el enunciado $20 \times 34 = n$. Este número, expresado como un producto indicado, puede asociarse con una disposición de 20 filas y 34 columnas o con una colección de 20 conjuntos de objetos, con 34 objetos cada uno. Podemos expresar 20 como (2×10) y 34 como $(30 + 4)$.

Entonces, $20 \times 34 = 20 \times (30 + 4)$; $20 \times (30 + 4) = (20 \times 30) + (20 \times 4)$. Para obtener el numeral decimal para (20×30), expresamos 20 como (2×10) y 30 como (3×10). Entonces, $(20 \times 30) = (2 \times 10) \times (3 \times 10)$. Por las propiedades conmutativa y asociativa, sabemos que $2 \times 10 \times 3 \times 10 = 2 \times 3 \times 10 \times 10$. Consideramos a $2 \times 3 \times 10 \times 10$ como $(2 \times 3) \times (10 \times 10)$. Conocemos los productos asociados con el par de números de un solo dígito, 2 y 3. Nuestro sistema de numeración hace fácil la multiplicación por 100. Estas ideas se utilizan en el desarrollo de un esquema para la determinación del numeral decimal que representa el mismo número que 20×34.

Supongamos, ahora, que se nos da el producto indicado (12×14) y queremos determinar el numeral decimal que representa este mismo número. Otra vez, construimos una disposición que pueda asociarse con este número. (V. la figura 2.)

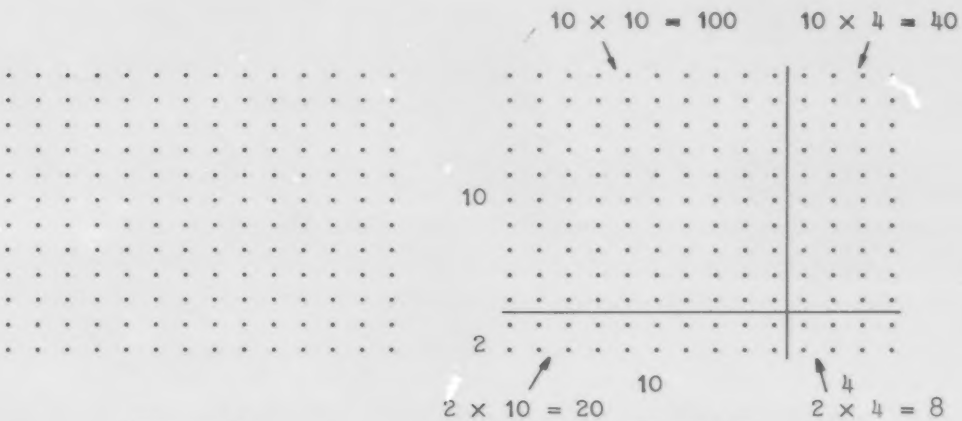


Figura 2

Figura 3

Podemos descomponer la disposición en varias disposiciones más pequeñas, y podemos hallar fácilmente un decimal numeral para expresar el número de elementos de ese conjunto. (V. la figura 3.) Es decir,

$$12 \times 14 = (10 + 2) \times (10 + 4)$$
$$= (10 \times 10) + (10 \times 4) + (2 \times 10) + (2 \times 4).$$

Cuando se utilizan solamente símbolos para expresar nuestro razonamiento, se puede esperar que su escritura permita pasar de un procedimiento muy parecido al anterior al algoritmo corto que algunos conocen. Por ejemplo, para obtener el número n representado en el enunciado matemático $12 \times 14 = n$, podemos escribir lo siguiente:

14		
× 12		
8	(2 × 4)	
20	(2 × 10)	
40	(10 × 4)	
100	(10 × 10)	
168		

Esto se parece a la figura 3. También el orden puede variar, como se indica a la derecha. En esta etapa, no es importante establecer un orden especial para todos los estudiantes.

14	14	
× 12	× 12	
100	20	
40	8	etc.
20	100	
8	40	
168	168	

Más tarde, puede emplearse este orden

14
× 12
28
140
168

o, este

14
× 12
140
28
168

Después, puede emplearse esto:

14
× 12
28
14
168

y finalmente, algunos alumnos pueden expresar el problema así:

14
× 12
168

El proceso de la división. Al desarrollar una técnica para dividir un número por otro, utilizamos lo que podemos llamar una propiedad distributiva "unilateral" de la división. Por ejemplo, para dividir 165 por 15, expresamos 165 como una suma de múltiplos de 15, es decir, 165 = 60 + 60 + 45. Entonces,

$$(60 + 60 + 45) \div 15 = (60 \div 15) + (60 \div 15) + (45 \div 15)$$

O, también, $= (4 + 4 + 3) = 11.$

Por tanto, $165 \div 15 = 11.$

Para los pares de números en que uno de los números no es un factor del otro, determinamos el mayor múltiplo de uno de los números, menor que el otro. Para dividir 137 por 14, es posible expresar 137 como la suma de varios múltiplos de 14 y un sumando menor que 14. No es apropiado el uso de la propiedad distributiva, pues no todos los sumandos son múltiplos de 14. De manera que hacemos lo siguiente:

$$137 = 70 + 56 + 11$$

Entonces, $137 = [(70 \div 14) + (56 \div 14)] \times 14 + 11$, o sencillamente, escribimos $137 = (5 + 4) \times 14 + 11$. Así, cuando dividimos 137 por 14, el cociente es 9 y el residuo es 11. El múltiplo mayor de 14 menor que 137 es 137 - 11 ó 126.

Con pares de números como los anteriores, en los que uno de los números no es factor del otro, no se puede aplicar el enunciado matemático de la forma $c \div b = a$ o $c = a \times b$. En su lugar, utilizamos el enunciado $c = (a \times b) + r$. Desde luego, vemos que si r es cero, entonces, el segundo enunciado toma la forma del primero. Obsérvese que $r < b$.

Esta es la base para el desarrollo de un esquema calculatorio, en el cual restamos múltiplos de un número del otro número para determinar el múltiplo mayor del primer número que es menor que el segundo.

Hay varias maneras de escribir los métodos de razonamiento. Incluimos varias maneras que emplearemos en esta unidad.

$$
\begin{aligned}
p &= 84 \div 4 \\
&= (80 + 4) \div 4 \\
&= (80 \div 4) + (4 \div 4) \\
&= 20 + 1 \\
&= 21
\end{aligned}
$$

O, si se emplean múltiplos de 4 más pequeños, cualquiera de las formas, A o B, indicadas a continuación, puede utilizarse:

A.

4) 84		
- 40	10	(10 × 4)
44		
- 40	10	(10 × 4)
4		
4	1	(1 × 4)
0	21	

ó

4) 84		
- 80	20	(20 × 4)
4		
- 4	1	(1 × 4)
0	21	

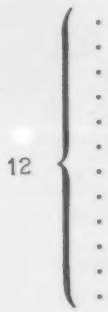
B.

21		
1		
10		
10		
4) 84		
40	(10 × 4)	
44		
40	(10 × 4)	
4		
4	(1 × 4)	
0		

ó

21		
1		
20		
4) 84		
80	(20 × 4)	
4		
4	(1 × 4)	
0		

Al desarrollar una técnica para dividir un número c por un número a, podemos considerar la descomposición de un conjunto de c elementos (puntos, por ejemplo) en a filas con el mismo número de puntos en cada fila. Por ejemplo, al dividir 132 por 12, podemos formar una disposición de 12 filas, empezando de la manera indicada en la figura:



Entonces, formamos otras columnas de puntos hasta que hayamos marcado 132 puntos. El número total de columnas es 11. Entonces, sabemos que $12 \times 11 = 132$ y, en consecuencia, $132 \div 12 = 11$. Del mismo modo, pudimos haber construido una disposición de 12 columnas en vez de 12 filas. Pero, quizás, sea conveniente limitar la atención de los estudiantes a una sola disposición en la que el número de filas es el número dado como el factor conocido, en este caso 12. Con la determinación del factor desconocido 11, se completa la división de 132 por 12.

Si se nos pidiera que dividiéramos 135 por 12, sabemos que no hay número cardinal alguno n tal que $12 \times n = 135$. Esto se podría indicar en una disposición, mediante 12 filas de 11 puntos cada una y 3 puntos sobrantes para formar una parte de una duodécima columna.) En este caso, no podemos dividir dos números cardinales y obtener un tercer número cardinal. Puesto que no es siempre posible obtener un número cardinal para el factor desconocido si el producto y el factor conocido son números cardinales, la división no es siempre posible en el sistema de los números cardinales. No podemos escribir $135 = 12 \times n$, donde n representa un número cardinal. Pero,

expresiones como "135 divido por 12" pueden interpretarse en relación con la descomposición de un conjunto de 135 objetos en el mayor número posible de subconjuntos equivalentes con 12 objetos en cada subconjunto, sobrando un subconjunto con menos de 12 objetos. Esto se representa mediante un enunciado matemático de la forma

$$135 = (n \times 12) + r$$

en el que n y r son números cardinales y n es el número mayor posible y $n < 12$. En este ejemplo, $n = 11$ y $r = 3$:

$$135 = (11 \times 12) + 3.$$

Puesto que la operación de división es una operación con dos números (dividendo y divisor) para obtener un número (cociente), el proceso de determinar los dos números n y r no es la operación de división. El algoritmo para escribir el razonamiento de determinar los números 11 y 3 en el ejemplo anterior puede ser el mismo que el algoritmo para dividir 132 por 12, pero hay una diferencia importante al escribir los resultados finales.

12) 135		
120	10	
15		
12	1	
3	11	

12) 132		
120	10	
12		
12	1	
	11	

Hay que hacer alguna distinción en el lenguaje referente a "dividir 132 por 12" y a "dividir 135 por 12".

Al "dividir 132 por 12", utilizaremos la terminología siguiente: "132 es el producto del factor conocido 12 y un factor desconocido representado por n. Pero, respecto a "dividir 135 por 12", utilizaremos la terminología siguiente: Determinar el cociente y el residuo. Desde luego, es cierto que los alumnos no pueden saber cuál de los dos casos ocurre, sin haber averiguado si hay un número cardinal para el factor desconocido. Es decir, no pueden saber si están buscando un factor desconocido o determinando un cociente y un residuo. En la

mayoría de estudios acerca de la división, se presenta primero el caso de "producto y factor desconocido" y, más tarde, el caso de "cocientes y residuos".

Siempre que consideramos un producto dado y un factor conocido cero, tenemos dificultad con la determinación del otro factor. Supongamos que se nos da el enunciado $24 \div 0 = n$. Entonces, $24 = 0 \times n$. Evidentemente, no hay número cardinal n alguno que podamos utilizar, puesto que el producto de 0 y un número cardinal cualquiera es cero. ¿Qué puede decirse acerca de $0 \div 0$? Si $0 \div 0 = n$, entonces, $0 \times n = 0$. Aquí, tenemos un caso diferente, pues cualquier número cardinal puede servir como el otro factor. En resumen, cuando un factor es 0, o bien no podemos determinar el otro factor o éste puede ser cualquier número cardinal. En consecuencia, convenimos en evitar la división por 0. Esto no presenta gran dificultad, pues no encontramos situaciones reales que tengamos que representar mediante los enunciados mencionados.

ENSEÑANZA DE LA UNIDAD

REPASO DE LA MULTIPLICACION Y LA DIVISION

Objetivo: Ayudar a los estudiantes en el aprendizaje de las técnicas de la multiplicación y llevarlos a comprender cómo esas técnicas dependen de las propiedades fundamentales de la multiplicación.

> No es necesario hacer un análisis largo de la multiplicación. Se utilizan disposiciones como ayuda para explicar el algoritmo de la multiplicación. Deberá repasarse la propiedad distributiva por su empleo continuo y su gran importancia.

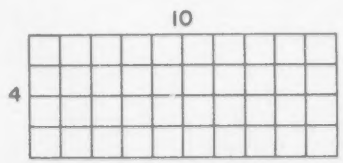
Materiales: Disposiciones

Vocabulario: Productos parciales, vertical

Exploración:

La multiplicación es una operación matemática con dos números para obtener un tercer número. Den algunos ejemplos de productos de pares de números: ¿Saben cómo determinar el producto de dos números cualesquiera? ¿Pueden dar algunos ejemplos de pares de números que no sepan multiplicar? (Algunos ejemplos son 325×78, 24×96, etc.)

Sabemos cuáles son los productos de pares de números menores que 10. Ahora, queremos aprender algo más acerca de la determinación de los productos de pares de números mayores que diez. Empecemos, recordando algunos productos sencillos. Supongamos que consideramos el enunciado $n = 4 \times 10$ como el número de elementos de una disposición de 4 filas y 10 columnas.



Si no sabemos qué número representa n, podemos determinarlo, considerando las maneras de descomponer la disposición. ¿Cómo podemos descomponer la disposición en dos disposiciones?

El maestro deberá pedir a los alumnos que sugieran varias posibilidades, procurando que incluyan dos disposiciones 4 por 5.

Destáquese la idea de que es muy fácil determinar el producto de dos números, cuando un factor es 10 y el otro es menor que 10. Podemos considerar 4×10 como 40 (4 decenas), 5×10 como 50 (5 decenas), etc. También, $10 \times 4 = 40$ ó 4 decenas, etc.

¿Creen que conocen una manera de determinar el producto de dos números, cuando uno es 10 y el otro es mayor que 10? (Traten varios ejemplos.) ¿Cuál es el producto de 10 y 10?; ¿de 11 y 10?; etc.

Utilícense varios ejemplos como los siguientes:

$$\begin{aligned} 10 \times 15 &= 10 \times (10 + 5) \\ &= (10 \times 10) + (10 \times 5) \\ &= 100 + 50 \\ &= 150 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11 \times 10 &= (10 + 1) \times 10 \\ &= (10 \times 10) + (1 \times 10) \\ &= 100 + 10 \\ &= 110 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \times 64 &= 10 \times (60 + 4) \\ &= (10 \times 60) + (10 \times 4) \\ &= 600 + 40 \\ &= 640 \end{aligned}$$

Acostúmbrese a los estudiantes a utilizar 10 como un factor, siempre que sea posible. Estúdiense otros ejemplos en clase, antes de asignar el Conjunto de problemas 2. Los problemas 19 y 20 sirven para introducir las ideas de la sección subsiguiente.

E334

Capítulo 7

TECNICAS DE LA MULTIPLICACION Y LA DIVISION

OPERACIONES

Consideramos la adición, la sustracción, la multiplicación y la división como las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética.

Hemos aprendido que una operación con números es una manera de considerar dos números para obtener otro número como resultado.

Cuando pensamos en 12 y 3 y obtenemos 15, estamos sumando. Cuando pensamos en 12 y 3 y obtenemos 9, estamos restando. Cuando pensamos en 12 y 3 y obtenemos 36, estamos multiplicando. Cuando pensamos en 12 y 3 y obtenemos 4, estamos dividiendo.

587 94

MULTIPLICACION

Expresamos la multiplicación de la siguiente manera:

$$9 \times 4 = 36.$$

Leemos el enunciado así:

9 por 4 es igual a 36.
9 por 4 es 36.

Sabemos que:

9 es un factor de 36.
4 es un factor de 36.
36 es el producto de 9 y 4.

DIVISION

Expresamos la división de la siguiente manera:

$$36 \div 9 = n$$
$$36 = n \times 9$$
ó
$$36 = 9 \times n.$$

Leemos el enunciado así:

36 dividido por 9 es igual a n.
36 es igual a qué número multiplicado por 9.
36 es igual a 9 multiplicado por qué número.

Sabemos que:

36 es el producto de 9 y n.
9 es un factor conocido de 36.
n es un factor desconocido de 36.

LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACION CON RESPECTO A LA ADICION

Los métodos de la multiplicación dependen de expresar un factor como una suma y, luego, usar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

Para multiplicar 48×6, puedes considerar 48 como $(40 + 8)$. Entonces, multiplicamos cada número por el factor 6. Utilizamos la propiedad distributiva.

$6 \times 48 = 6 \times (40 + 8)$	Representación de 48 como $(40 + 8)$.
$= (6 \times 40) + (6 \times 8)$	Distribución del 6 respecto de $(40 + 8)$.
$= 240 + 48$	El producto de 6 y 40 es 240. El producto de 6 y 8 es 48.
$= 288$	La suma de 240 y 48 es 288.

LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA DIVISION CON RESPECTO A LA ADICION

Para dividir 75 por 5, expresamos 75 como $(50 + 25)$. Luego, dividimos ambos números por 5.

$75 \div 5 = (50 + 25) \div 5$	Representación de 75 como $(50 + 25)$.
$= (50 \div 5) + (25 \div 5)$	Distribución del 5 respecto de $(50 + 25)$.
$= 10 + 5$	División de 50 por 5 y de 25 por 5.
$= 15$	La suma de 10 y 5 es 15.

Conjunto de problemas 1

Escribe los numerales del 1 al 20 en tu hoja de papel. Si un enunciado es cierto, escribe Cierto. Si un enunciado es falso, escribe Falso.

1. Utilizando el conjunto de los números cardinales, puedes multiplicar cualquier par de números y obtener siempre un número cardinal como su producto. (Cierto)
2. Utilizando el conjunto de los números cardinales, puedes dividir cualquier par de números y obtener siempre un número cardinal como el factor desconocido. (Falso)
3. $273 \times 846 = 846 \times 273$ (Cierto)
4. $3 \div 1 = 1$ (Falso)
5. $69 \div 3 = 3 \div 69$ (Falso)
6. $17 = 17 \div 1$ (Cierto)
7. $6 \times 0 = 6$ (Falso)
8. $1 \times 9 = 9$ (Cierto)
9. $0 \div 6 = 0$ (Cierto)
10. $6 \times 9 < 7 \times 9$ (Cierto)
11. $58 \times 69 > 69 \times 58$ (Falso)
12. $48 \div 4 = (40 \div 4) + (8 \div 4)$ (Cierto)
13. $(20 + 4) \times 7 = (20 \times 7) + (4 \times 7)$ (Cierto)
14. $2 \times (3 \times 17) = (3 \times 17) \times 2$ (Cierto)
15. $2 \times 34 = (2 \times 30) + (2 \times 40)$ (Falso)
16. $(21 \times 7) \div 7 = (21 \div 7) \times 7$ (Cierto)
17. $(48 \div 6) \div 2 = 48 \div (6 \div 2)$ (Falso)
18. $(5 \times 30) + (5 \times 6) = 5 \times 36$ (Cierto)
19. $(47 \times 18) + (47 \times 12) = 47 \times 30$ (Cierto)
20. $(12 \div 3) + (12 \div 3) = 24 \div 3$ (Cierto)

E338

Conjunto de problemas 2

Halla un numeral decimal para n en cada enunciado:

1. $10 \times 18 = n$ $(n = 180)$
2. $17 \times 10 = n$ $(n = 170)$
3. $27 \times 10 = n$ $(n = 270)$
4. $10 \times 35 = n$ $(n = 350)$
5. $10 \times 107 = n$ $(n = 1070)$
6. $12 \times 10 = n$ $(n = 120)$
7. $120 \times 10 = n$ $(n = 1200)$
8. $10 \times 19 = n$ $(n = 190)$
9. $30 \times 100 = n$ $(n = 3000)$
10. $300 \times 10 = n$ $(n = 3000)$
11. $10 \times 47 = n$ $(n = 470)$
12. $89 \times 10 = n$ $(n = 890)$
13. $54 \times 10 = n$ $(n = 540)$
14. $10 \times 98 = n$ $(n = 980)$
15. $10 \times 125 = n$ $(n = 1250)$
16. $314 \times 10 = n$ $(n = 3140)$
17. $412 \times 10 = n$ $(n = 4120)$
18. $842 \times 10 = n$ $(n = 8420)$

PROBLEMAS DIFICILES:

19. $17 \times 20 = n$

$17 \times 20 = 17 \times (10+10)$
$= (17 \times 10) + (17 \times 10)$
$= 170 + 170$
$= 340$

20. $12 \times 30 = n$

$12 \times 30 = 12 \times (3 \times 10)$
$= (12 \times 3) \times 10$
$= 36 \times 10$
$= 360$

ó

$12 \times 30 = 12 \times (10+10+10)$
$= (12 \times 10) + (12 \times 10) + (12 \times 10)$
$= 120 + 120 + 120$
$= 360$

MULTIPLICACION POR MULTIPLOS DE DIEZ

Objetivo: Aprender a multiplicar dos números, cuando un número es un múltiplo de 10, es decir, 20, 30, 40, etc.

Vocabulario: Múltiplos

Exploración:

Podemos utilizar lo que sabemos acerca de 10 como factor para aprender a utilizar 20 como factor. ¿Cómo podemos considerar el factor 20 para hacer uso de lo que sabemos? (20 = 10 + 10 ó 2 × 10) Examinemos algunos ejemplos:

$7 \times 20 = 7 \times (10 + 10)$	Representación de 20 como (10 + 10).
$= (7 \times 10) + (7 \times 10)$	Distribución de 7 respecto de (10 + 10).
$= 70 + 70$	Multiplicación de 7 y 10.
$= 140$	Suma de 70 y 70.

o también

$7 \times 20 = 7 \times (2 \times 10)$	Representación de 20 como (2 × 10).
$= (7 \times 2) \times 10$	Utilización de la propiedad asociativa.
$= 14 \times 10$	Multiplicación de 7 y 2.
$= 140$	Multiplicación de 14 y 10.

Si utilizamos el segundo método, no tendremos que sumar números grandes.

$$\begin{aligned} 9 \times 20 &= 9 \times (2 \times 10) \\ &= (9 \times 2) \times 10 \\ &= 18 \times 10 \\ &= 180 \end{aligned}$$

Para utilizar 20 como un factor, ¿qué debemos saber? (debemos saber usar 2 y 10 como factores.) ¿Podrán emplear las mismas ideas, si los factores son 30, 40, ..., 90? (Sí, si se conocen las combinaciones básicas que incluyen los números 3, 4, ..., 9.) Ensayemos con uno de esos factores.

$8 \times 70 = 8 \times (7 \times 10)$	Representación de 70 como 7×10.
$= (8 \times 7) \times 10$	Utilización de la propiedad asociativa.
$= 56 \times 10$	Multiplicación de 8 y 7.
$= 560$	Multiplicación de 56 y 10.

Sería muy conveniente para un estudiante, poder escribir $8 \times 70 = 560$ sin tener que llevar a cabo todos los pasos indicados en la Exploración. Todos los estudiantes deberán saber utilizar las combinaciones básicas para determinar tales productos.

Quizás, sea necesario considerar algunos problemas que se resuelven mediante la multiplicación, antes de asignar el Conjunto de problemas 4.

E339

MULTIPLICACION POR MULTIPLOS DE DIEZ

Hemos aprendido cómo multiplicar dos números, cuando uno de los números es 10.

Ahora, queremos aprender a multiplicar dos números, cuando uno de los números es un múltiplo de 10. Los múltiplos de 10 son 10, 20, 30, 40, 50, y así sucesivamente. ¿Puedes nombrar otros múltiplos de 10?

Suponte que vamos a determinar el producto de 7 y 20. Para multiplicar 7 y 20, podemos pensar en 20 como (10 + 10). Entonces,

$7 \times 20 = 7 \times (10 + 10)$	Representación de 20 como (10 + 10).
$= (7 \times 10) + (7 \times 10)$	Distribución de 7 respecto de (10 + 10).
$= 70 + 70$	Multiplicación de 7 y 10.
$= 140$	Suma de 70 y 70.

También, podemos considerar 20 como (2 × 10). Entonces,

$7 \times 20 = 7 \times (2 \times 10)$	Representación de 20 como (2 × 10).
$= (7 \times 2) \times 10$	Utilización de la propiedad asociativa.
$= 14 \times 10$	Multiplicación de 7 y 2.
$= 140$	Multiplicación de 14 y 10.

¿Es más fácil hallar el producto de 7 y 20 mediante el primer método o mediante el segundo? Hallemos el producto de otro par de números, usando el segundo método. Uno de los factores es un múltiplo de 10. Da razones para cada paso en el siguiente ejemplo:

$$8 \times 40 = 8 \times (4 \times 10)$$
$$= (8 \times 4) \times 10$$
$$= 32 \times 10$$
$$= 320$$

El producto de 8 y 40 es 320.

$$8 \times 40 = 320$$

Conjunto de problemas 3

Halla el numeral decimal para cada producto en los problemas del 1 al 12. En los problemas del 1 al 4, escribe cada paso como en el ejemplo.

Ejemplo: $7 \times 30 = 7 \times (3 \times 10)$
$= (7 \times 3) \times 10$
$= 21 \times 10$
$= 210$

1. 5×80 $= 5 \times (8 \times 10)$ $= (5 \times 8) \times 10$ $= 40 \times 10$ $= 400$

2. 70×7 $= (7 \times 10) \times 7$ $= (7 \times 7) \times 10$ $= 49 \times 10$ $= 490$

3. 50×8 $= (5 \times 10) \times 8$ $= (5 \times 8) \times 10$ $= 40 \times 10$ $= 400$

4. 6×30 $= 6 \times (3 \times 10)$ $= (6 \times 3) \times 10$ $= 18 \times 10$ $= 180$

En los problemas del 5 al 12, halla el numeral decimal para cada producto, sin detallar todos los pasos. En el problema 5, ¿puedes pensar que 7 multiplicado por 4 es 28 multiplicado por 10 es 280?

5. 7×40 (280)
6. 5×60 (300)
7. 6×70 (420)
8. 7×80 (560)
9. 60×9 (540)
10. 3×600 (1800)
11. 30×8 (240)
12. 9×90 (810)

E341

Conjunto de problemas 4

Utiliza enunciados matemáticos como ayuda para resolver cada uno de los siguientes problemas, expresa cada respuesta mediante un enunciado completo:

1. Las cuentas de un ábaco se pueden arreglar de manera que haya 20 cuentas en cada uno de los cuatro alambres. ¿Cuántas cuentas hay en este ábaco? ($20 \times 4 = m$, $(10 \times 2) \times 4 = m$, $10 \times (2 \times 4) = m$, $10 \times 8 = m$, $m = 80$) (En este ábaco hay 80 cuentas.)

2. Un cierto terreno se va a dividir en 7 solares. Se construirán 40 casas en cada solar. ¿Cuántas casas habrá en el terreno? ($m = 7 \times 40$, $= 7 \times (4 \times 10)$, $= (7 \times 4) \times 10$, $= 28 \times 10 = 280$) (En el terreno habrá 280 casas.)

3. En una sección de un avión había 20 filas de asientos con 5 asientos en cada fila. ¿Cuántos asientos había en esa sección del avión? ($m = 20 \times 5$, $= 100$) (En esa sección del avión había 100 asientos.)

4. En una asamblea, las sillas se dispusieron en 30 filas. Había 10 sillas en cada fila. ¿Cuántas sillas se colocaron para la asamblea? ($m = 30 \times 10$, $= 300$) (Se colocaron 300 sillas para la asamblea.)

5. Roberto compró abonos para los juegos de baloncesto de la temporada. Cada abono cuesta $3.20. ¿Cuánto gastó Roberto en los abonos? ($m = 3 \times 320$, $= 960$) (Roberto gastó $9.60 en los abonos.)

6. En el piso de la sala de familia, había 660 losetas. Se usaron 304 losetas en el piso de la cocina. ¿Cuántas losetas más se usaron en el piso de la sala de familia que en el piso de la cocina? ($m = 660 - 304$, $= 356$) (En el piso de la sala de familia se usaron 356 losetas más.)

MULTIPLICACION POR MULTIPLOS DE CIEN

Objetivo: Aprender a multiplicar dos números cardinales, cuando uno es 100 o un múltiplo de 100.

Exploración:

Aprendimos la multiplicación de dos números, cuando uno de los números es 10. Utilizamos este conocimiento para aprender a multiplicar números cardinales menores que 10 por 20, 30, ..., 90. Ahora, queremos aprender más acerca de la multiplicación por 100 y por múltiplos de 100.

El maestro debe repasar con los estudiantes ejemplos como 2×100, 4×100, 8×100, 100×6, etc. Entonces, debe preguntar si alguno puede sugerir una manera de determinar el producto de 4 y 200.

$$\begin{aligned} 4 \times 200 &= 4 \times (2 \times 100) \\ &= (4 \times 2) \times 100 \\ &= 8 \times 100 \\ &= 800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \times 100 &= 8 \times (10 \times 10) \\ &= (8 \times 10) \times 10 \\ &= 80 \times 10 \\ &= 800 \end{aligned}$$

¿Pueden ver una manera de multiplicar por 300, 400, ..., 900? Quizás, convenga examinar otro ejemplo.

$$\begin{aligned} 6 \times 700 &= 6 \times (7 \times 100) && \text{Representación de 700 como } (7 \times 100). \\ &= (6 \times 7) \times 100 && \text{Utilización de la propiedad asociativa.} \\ &= 42 \times 100 && \text{Multiplicación de 6 y 7.} \\ &= 4200 && \text{Multiplicación de 42 y 100.} \end{aligned}$$

Un ejemplo como 70×60 quizás resulte útil. La multiplicación de dos números menores que 100 puede conducir a una multiplicación en la que uno de los factores sea un número menor que 10.

$$
\begin{aligned}
70 \times 60 &= (7 \times 10) \times (6 \times 10) \\
&= [(7 \times 10) \times 6] \times 10 && \text{Propiedad asociativa} \\
&= [7 \times (10 \times 6)] \times 10 && \text{Propiedad asociativa} \\
&= [7 \times (6 \times 10)] \times 10 && \text{Propiedad conmutativa} \\
&= [(7 \times 6) \times 10] \times 10 && \text{Propiedad asociativa} \\
&= [42 \times 10] \times 10 && \text{Utilización de } 42 = 7 \times 6 \\
&= 42 \times (10 \times 10) && \text{Propiedad asociativa} \\
&= 42 \times 100 \\
&= 4200
\end{aligned}
$$

No debe enseñarse a los estudiantes este procedimiento largo. Se darán cuenta (sin equivocarse) que 70×60 se convierte en 42×100 y no es necesario que en este momemto se les den los detalles de por qué esto es correcto.

Quizás, los estudiantes sugieran la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
70 \times 60 &= (7 \times 10) \times (6 \times 10) \\
&= 7 \times 6 \times 10 \times 10 \\
&= (7 \times 6) \times (10 \times 10) \\
&= 42 \times 100 \\
&= 4200
\end{aligned}
$$

o, quizás, ésta:

$$
\begin{aligned}
70 \times 60 &= (7 \times 10) \times 60 \\
&= 7 \times (10 \times 60) \\
&= 7 \times 600 \\
&= 7 \times (6 \times 100) \\
&= (7 \times 6) \times 100 \\
&= 42 \times 100 \\
&= 4200
\end{aligned}
$$

E342

MULTIPLICACION POR MULTIPLOS DE CIEN

Hemos aprendido cómo multiplicar dos números cardinales, cuando uno de los números es 10. Hemos aprendido cómo multiplicar dos números cardinales, cuando uno es un múltiplo de 10. ¿Cuáles son algunos múltiplos de 10?

Examina este ejemplo para hallar el producto de 6 y un múltiplo de 10 (el 30):

$$\begin{aligned} 6 \times 30 &= 6 \times (3 \times 10) \\ &= (6 \times 3) \times 10 \\ &= 18 \times 10 \\ &= 180 \end{aligned}$$

Ahora, queremos aprender a multiplicar dos números cardinales, cuando uno de los números es 100. También, queremos aprender a calcular el producto de dos números, cuando un factor es un múltiplo de 100. ¿Qué son múltiplos de 100? ¿Es 200 un múltiplo de 100?; (sí) ¿300?; (sí) ¿y 400? (sí) ¿Puedes nombrar algunos otros múltiplos de 100? (sí. algunos ejemplos son 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1100, etc.)

E343

Mira a ver si puedes comprender los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: $6 \times 100 = 6 \times (10 \times 10)$
$= (6 \times 10) \times 10$
$= 60 \times 10$
$= 600$

Ejemplo 2: $18 \times 100 = 18 \times (10 \times 10)$
$= (18 \times 10) \times 10$
$= 180 \times 10$
$= 1800$

Ejemplo 3: $6 \times 300 = 6 \times (3 \times 100)$
$= (6 \times 3) \times 100$
$= 18 \times 100$
$= 1800$

Ejemplo 4: $50 \times 30 = (5 \times 10) \times (3 \times 10)$
$= (5 \times 3) \times (10 \times 10)$
$= 15 \times 100$
$= 1500$

Ejemplo 5: $16 \times 200 = 16 \times (2 \times 100)$
$= (16 \times 2) \times 100$
$= 32 \times 100$
$= 3200$

Ejemplo 6: $4 \times 2000 = 4 \times (20 \times 100)$
$= (4 \times 20) \times 100$
$= 80 \times 100$
$= 8000$

¿Puedes nombrar el producto, mirando solamente los dos números que se van a multiplicar? Trata los siguientes ejemplos:

87×10 (870)
5×60 (300)
40×30 (1200)
4×100 (400)
200×3 (600)
12×400 (4800)

¿Cuántos podrías hacer?

Ahora, puedes utilizar lo que has aprendido acerca de multiplicar por 10, por 100 y por sus múltiplos.

E344

Conjunto de problemas 5

Copia y completa cada uno de los siguientes enunciados:

1. $7 \times 10 =$ (70)
2. $5 \times 500 =$ (2500)
3. (1800) $= 3 \times 600$
4. $100 \times 8 =$ (800)
5. (90) $= 9 \times 10$
6. $10 \times 7 =$ (70)
7. $500 \times 5 =$ (2500)
8. $600 \times 3 =$ (1800)
9. $8 \times 60 =$ (480)
10. $50 \times 6 =$ (300)
11. (3000) $= 500 \times 6$
12. (5600) $= 7 \times 800$
13. $400 \times 3 =$ (1200)
14. $7 \times 500 =$ (3500)
15. $800 \times 5 =$ (4000)
16. $50 \times 60 =$ (3000)
17. $60 \times 90 =$ (5400)
18. $400 \times 20 =$ (8000)
19. $3 \times 2000 =$ (6000)
20. $6 \times 3000 =$ (18,000)

MAS INFORMACION ACERCA DE COMO MULTIPLICAR

Objetivo: Aprender a multiplicar dos números, cuando uno de ellos es menor que 10 y el otro es mayor que 10, pero menor que 100.

Materiales: Una disposición 4 por 32 para ilustrar ciertas ideas.

Vocabulario: Forma vertical, productos parciales

Exploración:

> El propósito de esta exploración es sugerir varias maneras de desarrollar un esquema calculatorio para multiplicar. Primero, pídase a los estudiantes que asocien un producto indicado con una disposición adecuada. Esto deberá proporcionar una base útil para aprender un procedimiento calculatorio.

Sabemos cómo determinar los numerales decimales que representan un mismo número, como por ejemplo, 4×20 y 8×60. Ahora, queremos aprender a determinar los productos de números como 4 y 32, 8 y 56, etc. Uno de los números será menor que 10. El otro será mayor que 10, pero menor que 100.

Supongamos que determinamos primero el producto de 4 y 32. ¿De cuántas filas (4) y cuántas columnas (32) es una disposición en que 4×32 es el número de elementos?

> Descómpongase una disposición 4 por 32 en dos disposiciones, una 4×30 y otra 4×2. Pídase a los estudiantes que describan cada disposición. A continuación, se sugiere un análisis de las disposiciones:

Ahora, veamos si podemos expresar lo que acabamos de hacer. Queremos hallar una manera de determinar productos sin utilizar una disposición.

Para determinar el número representado por $n = 4 \times 32$, primero, representamos 32 en la forma $30 + 2$. ¿Por qué representamos 32 como $30 + 2$, en vez de decir $16 + 16$? (Es

más fácil calcular 4×30 y 4×2 que 4×16.) Podemos, así, escribir el enunciado matemático en la forma $n = 4 \times (30 + 2)$. Ahora, utilizamos la propiedad distributiva de la multiplicación. $n = (4 \times 30) + (4 \times 2)$. Entonces, determinamos los productos (4×30) y (4×2). $(n = 120 + 8)$ Sumamos $120 + 8$ para obtener $n = 128$.

Lo que hemos hecho lo podemos resumir del modo siguiente:

$4 \times 32 = 4 \times (30 + 2)$	(Representación de 32 como $30 + 2$.)
$= (4 \times 30) + (4 \times 2)$	(Utilización de la propiedad distributiva.)
$= 120 + 8$	(Multiplicación de $(4 \times 30) + (4 \times 2)$.)
$= 128$	(Suma de 120 y 8.)

Hemos obtenido productos, utilizando las combinaciones básicas de la multiplicación y la propiedad distributiva. En cada paso, hemos escrito un enunciado matemático nuevo. Este método nos ayuda a ver por qué la respuesta es correcta. Escribir todo lo que razonamos, nos deja muy poco para recordar. Resultaría más conveniente obtener métodos abreviados, pero entonces tendríamos que recurrir más a la memoria. Un método consiste en escribir el trabajo como se hace a continuación, y que llamaremos <u>forma vertical</u>:

$$\begin{array}{rl} 32 & \\ \times\ 4 & \\ \hline 120 & (4 \times 30) \\ 8 & (4 \times 2) \\ \hline 128 & \end{array}$$

¿Qué razonamiento hacemos al escribir este ejercicio?

¿Por qué escribimos 120 y 8? (Consideramos $4 \times 32 = 4 \times (30 + 2) = (4 \times 30) + (4 \times 2)$. ¿Por qué es ésta una manera más corta de escribir la multiplicación? (Hay menos símbolos que escribir y la adición resulta más fácil. ¿De qué modo resulta más difícil? (Tenemos que <u>razonar</u> que $32 = 30 + 2$ y

recordarlo. Tenemos que saber que $4 \times 30 = 120$, sin tener que escribir paso alguno.)

Podemos escribirlo de esta manera:

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array} \qquad \text{o, de ésta:} \qquad \begin{array}{r} 30 + 2 \\ \times\ 4 \\ \hline 120 + 8 = 128 \end{array}$$

Algunos estudiantes consideran esto más fácil de entender.

Los números 120 y 8 se llaman productos parciales en la multiplicación. Hay que sumarlos para obtener el producto final, 128.

Tratemos otro ejemplo: $5 \times 61 = n$. Podemos escribir

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times\ 5 \\ \hline \end{array} \qquad \text{ó} \qquad \begin{array}{r} 60 + 1 \\ \times\ 5 \\ \hline 300 + 5 = 305 \end{array} \qquad \text{ó} \qquad \begin{array}{rl} 61 & \\ \times\ 5 & \\ \hline 300 & (5 \times 60) \\ 5 & (5 \times 1) \\ 305 & \end{array}$$

Esto indica que $5 \times 61 = 300 + 5$. ¿Por qué es cierto esto? $5 \times 61 = 5 \times (60 + 1) = (5 \times 60) + (5 \times 1)$. Representamos 61 como $60 + 1$.

Los estudiantes deben hacer algunas de estas observaciones. Representamos un factor como 34 y 61 de una manera más conveniente y utilizamos la propiedad distributiva. Expresamos el factor en decenas y unidades, etc.; por ejemplo, 32 se representa como $30 + 2$ y 61 como $60 + 1$.

Quizás, sea conveniente considerar un ejemplo en el cual se utiliza otra manera de representar uno de los factores:

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array} \qquad \text{ó} \qquad \begin{array}{r} 25 + 3 \\ \times\ 4 \\ \hline 100 + 12 = 112 \end{array}$$

Podría preguntarse a los estudiantes de qué enunciado matemático es abreviatura esta forma y por qué algunos podrían utilizarla (posiblemente porque recuerdan que $4 \times 25 = 100$). El punto principal sería

la ventaja de representar 28 en la forma 20 + 8 en vez de 25 + 3. (Nuestro sistema de numerales emplea la agrupación en decenas y unidades y es fácil aprender unos pocos productos simples, 4 × 20, 4 × 30, ..., etc.)

Examinemos aún otro problema: 5 × 61. (Considérense diversas maneras de determinar el producto.)

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times\ 5 \\ \hline 300 + 5 = 305 \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{r} 61 \\ \times\ 5 \\ \hline 300 \quad (5 \times 60) \\ 5 \quad (5 \times 1) \\ \hline 305 \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{r} 61 \\ \times\ 5 \\ \hline 5 \quad (5 \times 1) \\ 300 \quad (5 \times 60) \\ \hline 305 \end{array}$$

(Observen el cambio en el orden.)

¿Qué enunciado matemático representa lo siguiente?

$$\begin{aligned} 5 \times 61 &= 5 \times (60 + 1) \\ &= (5 \times 60) + (5 \times 1) \\ &= 300 + 5 \\ &= 305 \end{aligned}$$

Esto indica que podemos implicar cualquiera de los dos métodos y obtener el resultado correcto.

¿Se le ocurre a alguien un método aún más corto? ¿Tendremos que escribir los productos parciales antes de escribir el producto? ¿Cómo debemos razonar, si no los escribimos? Examinen el número 61. Primeramente, podemos pensar 5 × 1 = 5 y escribir el "5", porque el otro producto parcial, 5 × 60, terminará en "0". En vez de pensar 5 × 60 = 300, pensamos en

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times\ 5 \end{array}$$

5 × 60 = 30 decenas. 30 decenas más 5 unidades se escriben 305, de manera que escribimos

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times\ 5 \\ \hline 305 \end{array}$$

Quizás, convenga presentar varios otros ejemplos de este procedimiento y su justificación. Sin embargo, el maestro no debe obligar a los estudiantes a utilizar esta forma en esta etapa.

En el Conjunto de problemas 6, se presentan varios ejercicios que proporcionan práctica con este método corto.

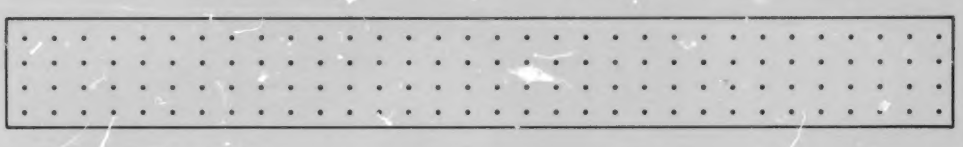
E345

MAS INFORMACION ACERCA DE COMO MULTIPLICAR

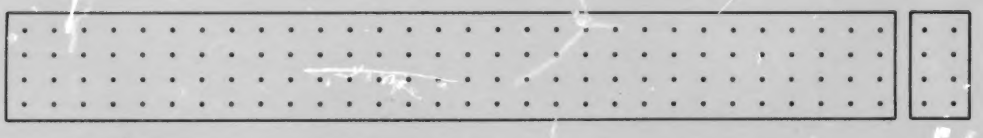
Ahora, aprendemos a multiplicar dos números como éstos:

4 y 32.

La siguiente disposición nos sirve de ayuda para pensar acerca de 4×32.



Podemos formar disposiciones más pequeñas.



¿Cuántas filas tiene cada una? (4) ¿Cuántas columnas tiene cada una? (30, 2) Escribimos

$$\begin{aligned} 4 \times 32 &= 4 \times (30 + 2) \\ &= (4 \times 30) + (4 \times 2) \\ &= 120 + 8 \\ &= 128 \end{aligned}$$

Podemos utilizar también una de las siguientes maneras:

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array}$$

ó

$$\begin{array}{r} 30 + 2 \\ \times\ 4 \\ \hline 120 + 8 = 128 \end{array}$$

ó

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 4 \\ \hline 120 \leftarrow (4 \times 30) \\ 8 \leftarrow (4 \times 2) \\ \hline 128 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32 \\ \times\ 4 \\ \hline 8 \\ 120 \\ \hline 128 \end{array}$$

¿Puedes pensar en alguna otra manera?

E346

Conjunto de problemas 6

Halla el numeral decimal para cada uno de los productos en los siguientes problemas; usa dos formas como en el ejemplo:

Ejemplo: $3 \times 12 = 3 \times (10 + 2)$
$= (3 \times 10) + (3 \times 2)$
$= 30 + 6$
$= 36$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 3 \\ \hline 6 \\ 30 \\ \hline 36 \end{array}$$

1. 3×32 $= 3 \times (30+2)$
$= (3 \times 30) + (3 \times 2)$
$= 90 + 6$
$= 96$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 3 \\ \hline 6 \\ 90 \\ \hline 96 \end{array}$$

2. 4×23 $= 4 \times (20+3)$
$= (4 \times 20) + (4 \times 3)$
$= 80 + 12$
$= 92$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 4 \\ \hline 12 \\ 80 \\ \hline 92 \end{array}$$

3. 6×34 $= 6 \times (30+4)$
$= (6 \times 30) + (6 \times 4)$
$= 180 + 24$
$= 204$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 6 \\ \hline 24 \\ 180 \\ \hline 204 \end{array}$$

4. 4×65 $= 4 \times (60+5)$
$= (4 \times 60) + (4 \times 5)$
$= 240 + 20$
$= 260$

$$\begin{array}{r} 65 \\ \times\ 4 \\ \hline 20 \\ 240 \\ \hline 260 \end{array}$$

5. 4×82 $= 4 \times (80+2)$
$= (4 \times 80) + (4 \times 2)$
$= 320 + 8$
$= 328$

$$\begin{array}{r} 82 \\ \times\ 4 \\ \hline 8 \\ 320 \\ \hline 328 \end{array}$$

E347

6. 5×87

$= 5 \times (80+7)$
$= (5 \times 80) + (5 \times 7)$
$= 400 + 35$
$= 435$

87
× 5
35
400
435

7. 7×34

$= 7 \times (30+4)$
$= (7 \times 30) + (7 \times 4)$
$= 210 + 28$
$= 238$

34
× 7
28
210
238

8. 8×37

$= 8 \times (30+7)$
$= (8 \times 30) + (8 \times 7)$
$= 240 + 56$
$= 296$

37
× 8
56
240
296

9. 4×36

$= 4 \times (30+6)$
$= (4 \times 30) + (4 \times 6)$
$= 120 + 24$
$= 144$

36
× 4
24
120
144

10. 8×89

$= 8 \times (80+9)$
$= (8 \times 80) + (8 \times 9)$
$= 640 + 72$
$= 712$

89
× 8
72
640
712

MULTIPLICACION DE NUMEROS MAS GRANDES

Objetivo: Extender las ideas utilizadas en la multiplicación de un número representado por un numeral de dos dígitos por un número representado por un numeral de un dígito a métodos que pueden utilizarse para multiplicar números representados por numerales de tres y cuatro dígitos por un número representado por un numeral de un dígito.

Quizás, el maestro quiera repasar primero los métodos que aprendieron los estudiantes para multiplicar dos números como 3 y 74, es decir,

$$\begin{aligned} 3 \times 74 &= 3 \times (70 + 4) \\ &= (3 \times 70) + (3 \times 4) \\ &= 210 + 12 \\ &= 222 \end{aligned}$$

ó

$$\begin{array}{r} 74 \\ \times\ 3 \\ \hline 210 \\ 12 \\ \hline 222 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (3 \times 70) \\ (3 \times 4) \\ \hline (3 \times 74) \end{array}$$

Entonces, trátese de que vean cómo pueden utilizar los mismos procedimientos para números como 3 y 312. Pídase que sugieran otra manera de representar 312. Luego, pídase que indiquen cómo pueden emplear la propiedad distributiva.

Obsérvese que una manera conveniente es $300 + 10 + 2$ porque conocemos productos como 3×100 y 3×10.

$$\begin{aligned} 3 \times 312 &= 3 \times (300 + 10 + 2) \\ &= (3 \times 300) + (3 \times 10) + (3 \times 2) \\ &= 900 + 30 + 6 \\ &= 936 \end{aligned}$$

Entonces explórense maneras posibles utilizando la forma vertical.

Formas verticales:

$$\begin{array}{r} 300 + 10 + 2 \\ \times\ 3 \\ \hline 900 + 30 + 6 = 936 \end{array}$$

ó	312		ó	312
	× 3		≡	× 3
	900	(3 × 300)		6
	30	(3 × 10)		30
	6	(3 × 2)		900
	936	(3 × 312)		936

Algunos estudiantes considerarán más fácil la forma abreviada

$$\begin{array}{r} 312 \\ \times\ 3 \\ \hline 936 \end{array}$$

Pero, probablemente, no es la mejor forma para todos los estudiantes en este momento.

Utilícense otros pares de números, incluyendo entre ellos pares como 301 y 2, 6 y 1211, etc.

$$\begin{aligned} 2 \times 301 &= 2 \times (300 + 1) \\ &= (2 \times 300) + (2 \times 1) \\ &= 600 + 2 \\ &= 602 \end{aligned}$$

Formas verticales:

	301			301
	× 2		ó ≡	2
	600	(2 × 300)		2
	2	(2 × 1)		600
	602	(2 × 301)		602

$$\begin{aligned} 6 \times 1211 &= 6 \times (1000 + 200 + 10 + 1) \\ &= (6 \times 1000) + (6 \times 200) + (6 \times 10) + (6 \times 1) \\ &= 6000 + 1200 + 60 + 6 \\ &= 7266 \end{aligned}$$

Formas verticales:

	1211			1211
	× 6		ó ≡	6
	6000	(6 × 1000)		6
	1200	(6 × 200)		60
	60	(6 × 10)		1200
	6	(6 × 1)		6000
	7266	(6 × 1211)		7266

E348

MULTIPLICACION DE NUMEROS MAS GRANDES

Sabemos cómo hallar los productos de números como 3 y 46, 7 y 39, 6 y 45. ¿Qué número debe representar n en cada uno de estos enunciados, si el enunciado es cierto?

$$3 \times 46 = n$$

$$7 \times 39 = n$$

$$6 \times 45 = n$$

Los productos son 273, 138 y 270. Ahora, aparea los productos y los productos indicados.

Ahora, necesitamos hallar el producto de números como 3 y 312.

Escribimos

$$\begin{aligned} 3 \times 312 &= 3 \times (300 + 10 + 2) \\ &= (3 \times 300) + (3 \times 10) + (3 \times 2) \\ &= 900 + 30 + 6 \\ &= 936 \end{aligned}$$

E349

Hay varias maneras de utilizar la forma vertical para la multiplicación; he aquí algunas de ellas:

$$\begin{array}{r} 300 + 10 + 2 \\ \times\ 3 \\ \hline 900 + 30 + 6 = 936 \end{array}$$

ó

$$\begin{array}{rl} 312 & \\ \times\ 3 & \\ 900 & \longleftarrow (3 \times 300) \\ 30 & \longleftarrow (3 \times 10) \\ 6 & \longleftarrow (3 \times 2) \\ \hline 936 & \longleftarrow (3 \times 312) \end{array}$$

ó

$$\begin{array}{r} 312 \\ \times\ 3 \\ 6 \\ 30 \\ 900 \\ \hline 936 \end{array}$$

En el último ejemplo, ¿cómo obtuvimos 900, 30 y 6?

No necesitas utilizar todas estas maneras. Utiliza la que te guste más. Puede gustarte una forma abreviada como la siguiente:

$$\begin{array}{r} 312 \\ \times\ 3 \\ \hline 936 \end{array}$$

¿Puedes descubrir una manera de hallar el producto de 4 y 2102?

E350

Conjunto de problemas 7

Halla el numeral decimal para el producto en cada uno de los enunciados siguientes; indica los productos parciales:

1. 2 × 311 (622)
2. 2 × 434 (868)
3. 4 × 322 (1288)
4. 3 × 412 (1236)
5. 3 × 210 (630)
6. 2 × 303 (606)
7. 4 × 300 (1200)
8. 5 × 601 (3005)
9. 8 × 711 (5688)
10. 3 × 3020 (9060)
11. 4 × 3002 (12,008)
12. 7 × 5101 (35,707)

E351

Conjunto de problemas 8

Resuelve estos problemas como en el ejemplo; usa la forma vertical, si puedes:

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 311 \\ \times\ 5 \\ \hline 1{,}555 \end{array}$$

1. $\begin{array}{r} 243 \\ \times\ 2 \\ \hline 486 \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 210 \\ \times\ 4 \\ \hline 840 \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 203 \\ \times\ 3 \\ \hline 609 \end{array}$

4. $\begin{array}{r} 202 \\ \times\ 4 \\ \hline 808 \end{array}$

5. $\begin{array}{r} 420 \\ \times\ 2 \\ \hline 840 \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 800 \\ \times\ 6 \\ \hline 4800 \end{array}$

7. $\begin{array}{r} 821 \\ \times\ 4 \\ \hline 3284 \end{array}$

8. $\begin{array}{r} 3020 \\ \times\ 3 \\ \hline 9060 \end{array}$

9. $\begin{array}{r} 3002 \\ \times\ 4 \\ \hline 12{,}008 \end{array}$

10. $\begin{array}{r} 502 \\ \times\ 3 \\ \hline 1506 \end{array}$

11. $\begin{array}{r} 134 \\ \times\ 2 \\ \hline 268 \end{array}$

12. $\begin{array}{r} 612 \\ \times\ 4 \\ \hline 2448 \end{array}$

13. $\begin{array}{r} 723 \\ \times\ 3 \\ \hline 2169 \end{array}$

14. $\begin{array}{r} 632 \\ \times\ 3 \\ \hline 1896 \end{array}$

15. $\begin{array}{r} 734 \\ \times\ 2 \\ \hline 1468 \end{array}$

16. $\begin{array}{r} 1010 \\ \times\ 9 \\ \hline 9090 \end{array}$

17. $\begin{array}{r} 1023 \\ \times\ 3 \\ \hline 3069 \end{array}$

18. $\begin{array}{r} 2332 \\ \times\ 3 \\ \hline 6996 \end{array}$

19. $\begin{array}{r} 8212 \\ \times\ 4 \\ \hline 32{,}848 \end{array}$

20. $\begin{array}{r} 9111 \\ \times\ 8 \\ \hline 72{,}888 \end{array}$

UN METODO MAS CORTO DE MULTIPLICAR

Objetivo: Ayudar a los estudiantes (que estén preparados para ello) a aprender un método de multiplicar más corto.

> Quizás, el maestro quiera dejar esta lección para más adelante. Sin embargo, convendría expresar el producto de, por ejemplo, 4 y 34, como 136 en vez de expresarlo primero como suma indicada de los dos productos 120 y 16 y, entonces, expresar la suma como 136. Sin embargo, no es incorrecto hacer esto último, si los alumnos no están preparados para tratar un método más corto.

Nuevamente, examinemos un problema como $4 \times 34 = n$.
¿De qué modo podemos determinar el número que n representa?

> Si a los alumnos no se les ocurre la forma más corta, entonces, el maestro deberá sugerirla como otra posibilidad. Quizás, las ideas siguientes puedan ser útiles en la explicación. Podemos escribir los pasos al multiplicar 34 por 5 así:
>
> $$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 4 \\ \hline 16 \\ 120 \\ \hline 136 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (4 \times 4) \\ (4 \times 30) \\ \hline (4 \times 34) \end{array}$$

Veamos si podemos hallar un método más corto.

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 4 \end{array}$$

$4 \times 4 = 16$. Consideren esto como 1 decena y 6 unidades. En lugar de escribir 16, escriban 6 en el lugar de las unidades. Recordaremos la decena o podemos escribir un 1 encima del 3 (indiquen esto).

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 4 \\ \hline 6 \end{array}$$

También, dijimos que $4 \times 30 = 120$. ¿A cuántas decenas equivale esto? (12) Pero, ¿qué nos falta? (La decena de 16.) Así que, 12 decenas y 1 decena es 13 decenas o 130. ¿Cómo se escribe el numeral para representar 13 decenas y 6 unidades? (136) ¿Cuál es el producto de 4 y 34? (136)

Estúdiense varios otros ejemplos, como 5×37, 3×26, 6×45, etc. Si los alumnos no están preparados, no insista en que aprendan este método abreviado. Quizás, puedan aprenderlo más adelante con facilidad. Aunque parezca que no están preparados para entender algunos ejemplos, utilícense las formas larga y corta al mismo tiempo para mostrar claramente lo que hay que recordar.

E352

UN METODO MÁS CORTO DE MULTIPLICAR

En nuestra última lección, viste el modo de abreviar la forma a la izquierda de manera que puedas multiplicar 312×3 en la forma indicada a la derecha:

312	312
× 3	× 3
6	936
30	
900	
936	

¿Puedes decir lo que tendrías que razonar para utilizar este método? Queremos pensar algo más sobre estos métodos abreviados.

Suponte que necesitamos hallar el producto de 4 y 23. Ya sabemos cómo hallar el producto mediante el siguiente método:

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 4 \\ \hline 12 \\ 80 \\ \hline 92 \end{array}$$

Ahora, veamos si podemos hallar una forma más corta para hacer esto.

23	Podemos pensar $4 \times 3 = 12$. Considera a 12
× 4	como 1 decena y 2 unidades. Escribamos el
2	2 en el lugar de las unidades. Retendremos 1 decena.
23	$4 \times 20 = 80$. 80 es 8 decenas. 8 decenas y
× 4	1 decena son 9 decenas. ¿Cómo podemos escribir
92	el numeral para 9 decenas y 2 unidades?

¿Cuál es el producto de 4 y 23? Podemos escribir

$$4 \times 23 = 92.$$

E353

He aquí algunos problemas. ¿Puedes llenar los blancos?

45	82
× 3	× 6
13 5	4 9 2

37	74
× 5	× 9
18 5	66 6

28
× 3
8 4

Quizás, quieras utilizar este método abreviado para resolver los problemas del Conjunto de problemas 9. Tal vez, quieras tratar varios métodos.

E354

Conjunto de problemas 9

Usa la forma que más te guste para hallar el número que representa n en cada uno de los siguientes enunciados:

1. $4 \times 17 = n$ (n = 68)
2. $7 \times 23 = n$ (n = 161)
3. $9 \times 62 = n$ (n = 558)
4. $6 \times 81 = n$ (n = 486)
5. $7 \times 87 = n$ (n = 609)
6. $9 \times 56 = n$ (n = 504)
7. $5 \times 52 = n$ (n = 260)
8. $3 \times 89 = n$ (n = 267)
9. $6 \times 56 = n$ (n = 336)
10. $8 \times 78 = n$ (n = 624)

Copia y completa. (Nota: Cada blanco debe sustituirse por un dígito.)

11.
$$\begin{array}{r} 4\,5 \\ \times\ 5 \\ \hline 225 \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{r} 3\,8 \\ \times\ 6 \\ \hline 228 \end{array}$$

13.
$$\begin{array}{r} 5\,9 \\ \times\ 7 \\ \hline 413 \end{array}$$

14.
$$\begin{array}{r} 7\,9 \\ \times\ 5 \\ \hline 395 \end{array}$$

15.
$$\begin{array}{r} 1\,8 \\ \times\ 4 \\ \hline 7\,2 \end{array}$$

Nota: El producto es un numeral de dos cifras.

16.
$$\begin{array}{r} 4\,5 \\ \times\ 8 \\ \hline 3\,6\,0 \end{array}$$

17.
$$\begin{array}{r} 1\,_\,_ \\ \times\ \ 6 \\ \hline 6\,_\,_ \end{array}$$

(100, 101, 102, ..., 116. El producto depende del factor dos conocido.)

MULTIPLICACION DE NUMEROS MENORES QUE 100 POR MULTIPLOS DE 10

Objetivo: Explicar cómo se determina el producto de números como 23 y 30, 50 y 46, etc.; es decir, cuando uno de los números es un múltiplo de 10 y el otro es mayor que 10, pero menor que 100.

Repásese con los estudiantes el método que se utilizó para obtener el producto de 23 y 3, es decir,

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 3 \\ \hline 69 \end{array} \qquad (3 \times 3) + (3 \times 20)$$

Quizás, algunos estudiantes estén utilizando todavía las formas siguientes:

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 3 \\ \hline 60 \\ 9 \\ \hline 69 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (3 \times 20) \\ (3 \times 3) \\ \hline (3 \times 23) \end{array} \qquad \text{ó} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ \times\ 3 \\ \hline 9 \\ 60 \\ \hline 69 \end{array}$$

Quizás, otros prefieran emplear el método siguiente:

$$\begin{aligned} 3 \times 23 &= 3 \times (20 + 3) \\ &= (3 \times 20) + (3 \times 3) \\ &= 60 + 9 \\ &= 69 \end{aligned}$$

Pídase a los alumnos que sugieran posibles procedimientos para calcular 30×23, basándose en lo que ya saben. Por ejemplo, a algunos se les pueden ocurrir la idea de representar de otra manera uno de los factores.

$$\begin{aligned} 30 \times 23 &= 30 \times (20 + 3) \\ &= (30 \times 20) + (30 \times 3) \end{aligned}$$

Sabemos cómo obtener estos productos.

$$30 \times 20 = 600 \quad \text{y} \quad 30 \times 3 = 90.$$

Quizás, el maestro deba proporcionar más práctica en la determinación de productos de dos múltiplos de 10 como 20 y 30, 40 y 30, etc. O, quizás algún estudiante sugiera el uso de la forma vertical. El análisis podría conducirse así:

$$30 \times 23 = n$$

Puesto que podemos expresar 23 como 20 + 3, tenemos lo siguiente:

$$30 \times 23 = 30 \times (20 + 3)$$
$$= (30 \times 20) + (30 \times 3)$$
$$= 600 + 90$$
$$= 690$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 30 \\ \hline 90 \\ 600 \\ \hline 690 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (30 \times 3) \\ (30 \times 20) \\ \hline (30 \times 23) \end{array}$$

Otra manera de presentar la explicación es repasar cómo podemos multiplicar un número cualquiera por 10. Por ejemplo, 23×10 significa 23 decenas, lo cual representamos con el numeral 230. De modo que $23 \times 10 = 230$.

Podemos considerar 30×23 como $(10 \times 3) \times 23$. Podemos obtener primero el producto de 3 y 23. Entonces, podemos multiplicar ese producto por 10.

$$30 \times 23 = (10 \times 3) \times 23$$
$$= 10 \times (3 \times 23)$$
$$= 10 \times 69$$
$$= 690$$

Quizás, no todos los alumnos estén preparados para utilizar la forma más corta.

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 30 \\ \hline 690 \end{array}$$

Sin embargo, haber tenido la experiencia de analizar una exploración como ésta puede servirles de ayuda para entender más adelante un procedimiento más corto.

Trátense con los estudiantes ejemplos parecidos a los siguientes, utilizando los procedimientos más apropiados para la clase, de los ya explicados:

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 20 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32 \\ \times\ 40 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18 \\ \times\ 50 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 63 \\ \times\ 70 \\ \hline \end{array}$$

Sugerimos, por ejemplo, lo siguiente:

Exprésese 34 como (30 + 4). Entonces,

$$\begin{array}{r} 30 + 4 \\ \times\ 20 \\ \hline 600 + 80 = 680 \end{array} \qquad \text{ó} \qquad \begin{array}{r} 34 \\ \times\ 20 \\ \hline 80 \\ 600 \\ \hline 680 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (20 \times 4) \\ (20 \times 30) \\ \hline (20 \times 34) \end{array}$$

Procúrese que los estudiantes que estén preparados para ello, utilicen la forma siguiente:

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 20 \\ \hline 80 \\ 600 \\ \hline 680 \end{array}$$

Quizás, algunos estudiantes quieran utilizar la forma aún más corta.

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 20 \\ \hline 680 \end{array}$$

Esto podría hacerse más fácil, pensando primero en 2×34 y, después, multiplicando el producto por 10.

E355

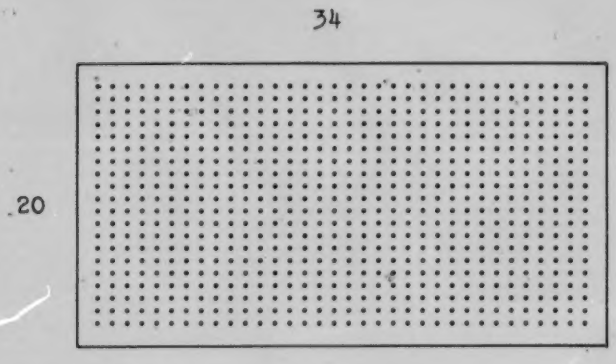
MULTIPLICACION DE NUMEROS MENORES QUE 100 POR MULTIPLOS DE 10

Ahora, queremos aprender a multiplicar números como 20 y 34, 40 y 46, 50 y 23, 60 y 31.

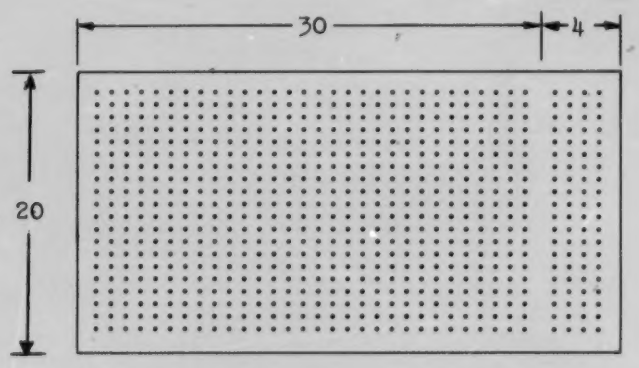
¿Es un número de cada par un múltiplo de 10? Nombra los múltiplos de 10 en esos pares.

¿Es el otro número en cada par menor que 100?

Aprendamos una manera de hallar el producto de 20 y 34. ¿Representa 20 × 34 el número de puntos en la siguiente disposición? ¿Cómo puedes saberlo?



He aquí otra disposición justamente como la de arriba; descompongámosla en disposiciones más pequeñas:



E356

¿Describe (20×34) la primera disposición? (بعد)

¿Describe $(20 \times 30) + (20 \times 4)$ la segunda disposición? (بعد)

¿Muestran las dos disposiciones que $20 \times 34 = (20 \times 30) + (20 \times 4)$? (بعد)

¿Te ayuda esto a encontrar el número de puntos en la disposición mayor? (بعد)

Podemos escribir:

$$20 \times 34 = 20 \times (30 + 4)$$
$$= (20 \times 30) + (20 \times 4)$$

$30 + 4$	34	
$\times 20$	$\times 20$	
$600 + 80 = 680$	80	(20×4)
	600	(20×30)
	680	(20×34)

¿Puedes pensar en otras maneras de hallar el producto de estos dos números?

Conjunto de problemas 10

Halla el número que representa n en cada uno de los siguientes enunciados:

1. $30 \times 30 = n$ (n = 900)
2. $20 \times 40 = n$ (n = 800)
3. $10 \times 80 = n$ (n = 800)
4. $30 \times 40 = n$ (n = 1200)
5. $20 \times 50 = n$ (n = 1000)
6. $60 \times 90 = n$ (n = 5400)
7. $70 \times 70 = n$ (n = 4900)
8. $80 \times 40 = n$ (n = 3200)
9. $30 \times 90 = n$ (n = 2700)
10. $50 \times 70 = n$ (n = 3500)
11. $20 \times 60 = n$ (n = 1200)
12. $70 \times 80 = n$ (n = 5600)
13. $20 \times 43 = n$ (n = 860)
14. $30 \times 33 = n$ (n = 990)
15. $10 \times 87 = n$ (n = 870)
16. $50 \times 32 = n$ (n = 1600)
17. $50 \times 62 = n$ (n = 3100)
18. $70 \times 83 = n$ (n = 5810)
19. $90 \times 65 = n$ (n = 5850)
20. $80 \times 87 = n$ (n = 6960)
21. $90 \times 38 = n$ (n = 3420)
22. $70 \times 57 = n$ (n = 3990)
23. $40 \times 93 = n$ (n = 3720)
24. $60 \times 83 = n$ (n = 4980)

DETERMINACION DE PRODUCTOS DE DOS NUMEROS CUALESQUIERA MAYORES QUE 10 (Y MENORES QUE 100)

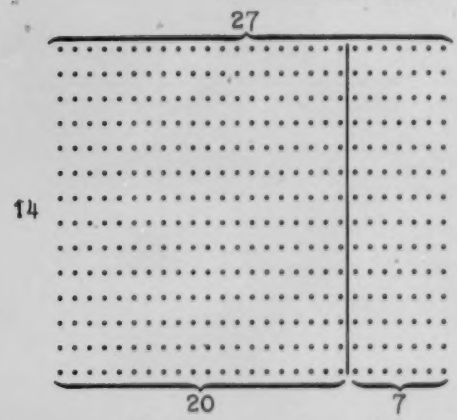
Objetivo: Aprender varios métodos para determinar productos de pares de números como 23 y 34, 46 y 27, etc., en los que ambos números son menores que 100, mayores que 10, pero ninguno de ellos es un múltiplo de 10.

Materiales: Una disposición 14 por 27 en un material sólido, pero flexible.
Otra disposición en la que el número de filas y el de columnas se representen con numerales de dos dígitos.

El uso de disposiciones para ayudar a los estudiantes a comprender los pasos en la multiplicación, por ejemplo de 14 y 27, es muy conveniente. Se pueden utilizar cualquiera de los dos métodos siguientes. Obsérvese que cada método depende de la propiedad distributiva. En el primer método (en las dos formas A y B), se utiliza la propiedad distributiva una vez; en el segundo método, se utiliza tres veces.

Queremos multiplicar 14 por 27.

PRIMER METODO



Disposición 14 por 27:
14 × 20 = 280
14 × 7 = 98
280 + 98 = 378
En la disposición completa, hay 378 puntos.

Obsérvese con los estudiantes que el número de puntos de la disposición se obtiene, multiplicando 14 por 27. (Hay 14 filas y 27 columnas.) Por tanto, 14 × 27 = número de puntos.

Entonces, descompóngase la disposición como se indica. El número de puntos de una parte es 14×20. El número de puntos de la otra parte es 14×7. Por tanto,

(A)

$$\begin{aligned} 14 \times 27 &= 14 \times (20 + 7) \\ &= (14 \times 20) + (14 \times 7) \\ &= 280 + 98 \\ &= 378 \end{aligned}$$

Esperamos que la mayoría de los estudiantes pueda multiplicar 14 por 20 y 14 por 7, recordando lo que aprendieron en lecciones anteriores de este capítulo. Es importante que al determinar los productos parciales, se den cuenta de que utilizan varias de las técnicas de multiplicación que ya aprendieron.

Después de plegar las disposiciones, debe escribirse el trabajo en la pizarra. Deben enseñarse a los estudiantes los dos siguientes métodos de escribir los productos parciales:

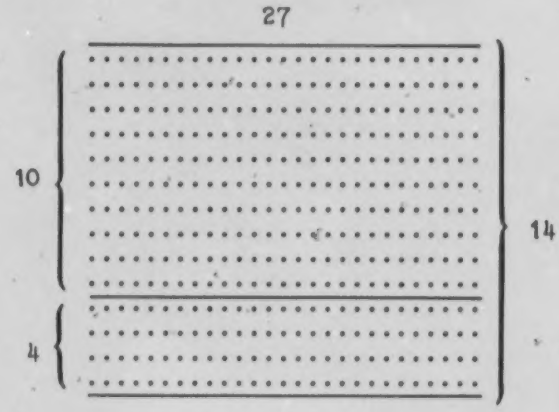
Forma A:

$$\begin{aligned} 14 \times 27 &= 14 \times (20 + 7) \\ &= (14 \times 20) + (14 \times 7) \\ &= 280 + 98 \\ &= 378 \end{aligned}$$

Forma B:

$$\begin{array}{rl} 27 & \\ \times\ 14 & \\ \hline 280 & (14 \times 20) \\ 98 & (14 \times 7) \\ \hline 378 & (14 \times 27) \end{array}$$

Considérese la siguiente disposición con relación al mismo ejemplo:



$$10 \times 27 = 270$$
$$4 \times 27 = 108$$
$$14 \times 27 = (10 + 4) \times 27$$
$$= (10 \times 27) + (4 \times 27)$$
$$= 270 + 108$$
$$= 378$$

Otra vez, después de plegar la disposición, escríbase el trabajo en la pizarra.

$$14 \times 27 = (10 + 4) \times 27$$
$$= (10 \times 27) + (4 \times 27)$$
$$= 270 + 108$$
$$= 378$$

O, cambiando el orden

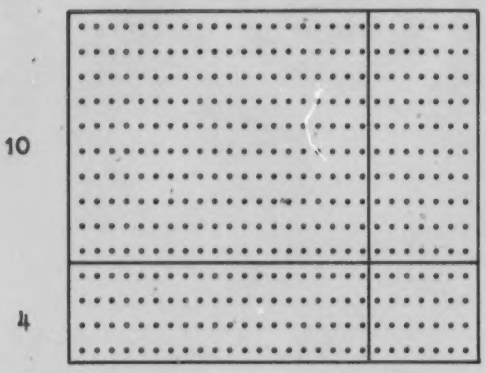
27		27	
× 14		× 14	
270	(10 × 27)	108	(4 × 27)
108	(4 × 27)	270	(10 × 27)
378	(14 × 27)	378	(14 × 27)

Conviene considerar el segundo método, aun cuando todos los alumnos entiendan con facilidad el primero.

SEGUNDO METODO

$14 \times 27 = 14 \times (20 + 7)$

$= (14 \times 20) + (14 \times 7)$



Si es necesario, debe ayudarse a los estudiantes a darse cuenta de que

$14 \times 20 = (10 + 4) \times 20$ y

$14 \times 7 = (10 + 4) \times 7.$

Entonces, escríbase

$14 \times 27 = 14 \times (20 + 7)$

$= (14 \times 20) + (14 \times 7)$

$= [(10 + 4) \times 20] + [(10 + 4) \times 7]$

$= [(10 \times 20) + (4 \times 20)] +$

$[(10 \times 7) + (4 \times 7)]$

$= [200 + 80] + [70 + 28]$

$= 280 + 98$

$= 378$

Los productos parciales 200, 80, 70 y 28 deben relacionarse, ahora, con el número de puntos en las 4 particiones de la disposición.

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 14 \\ \hline 28 \\ 80 \\ 70 \\ 200 \\ \hline 378 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (4 \times 7) \\ (4 \times 20) \\ (10 \times 7) \\ (10 \times 20) \\ \hline (14 \times 27) \end{array}$$

Quizás, sea necesario considerar otros ejemplos parecidos en los que se utilicen disposiciones adecuadas y los dos métodos estudiados.

E358

DETERMINACION DE PRODUCTOS DE DOS NUMEROS CUALESQUIERA MAYORES QUE 10 (Y MENORES QUE 100)

Hemos aprendido a hallar el producto de pares de números. Hicimos algunas selecciones en los números que escogimos.

Aprendimos a hallar productos de pares de números como los siguientes:

3 y 45

$3 \times 45 = 3 \times (40 + 5)$
$= (3 \times 40) + (3 \times 5)$
$= 120 + 15$
$= 135$

45
× 3
120 (3 × 40)
15 (3 × 5)
135

8 y 16

$8 \times 16 = 8 \times (10 + 6)$
$= (8 \times 10) + (8 \times 6)$
$= 80 + 48$
$= 128$

16
× 8
128 (8 × 6) + (8 × 10)

5 y 24

$5 \times 24 = 5 \times (20 + 4)$
$= (5 \times 20) + (5 \times 4)$
$= 100 + 20$
$= 120$

24
× 5
120 (5 × 4) + (5 × 20)

Podemos utilizar el mismo método para todos estos ejemplos. Podemos utilizar diferentes métodos para hallar el producto de números como los anteriores.

E359

Aprendimos a hallar productos de números, cuando uno de ellos era un múltiplo de 10. ¿Qué números menores que 100 son múltiplos de 10?

¿Puedes hallar el producto de cada uno de los siguientes pares?

20 y 45

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 20 \\ \hline \end{array}$$

10 y 17

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 10 \\ \hline \end{array}$$

37 y 20

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times\ 37 \\ \hline \end{array}$$

ó

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 20 \\ \hline \end{array}$$

¿Por qué podemos cambiar el orden?

Los productos son 900, 170 y 740. ¿Los obtuviste correctamente?

Ahora, aprenderemos cómo hallar los productos de dos números cualesquiera mayores que 10. Todavía haremos una selección. Serán números menores que 100.

E360

Ana cortó un bizcocho grande.

Cortó 12 pedazos largos (filas) de bizcocho.

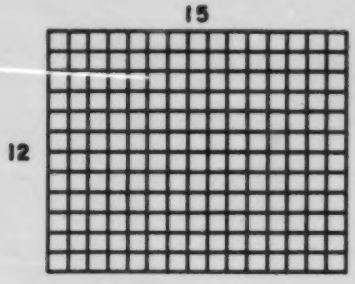
Cortó cada pedazo largo en 15 pedazos.

¿Cuántos pedazos de bizcocho tenía?

¿Es este enunciado matemático apropiado para este problema?

$12 \times 15 = n$ ¿Por qué?

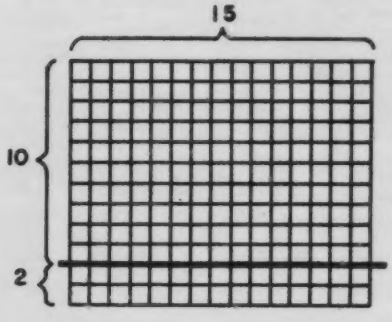
¿Nos da la siguiente figura una idea del bizcocho? Explícalo.



Descompongamos esta disposición en disposiciones más pequeñas.

¿Qué expresión de producto te sugiere cada disposición?

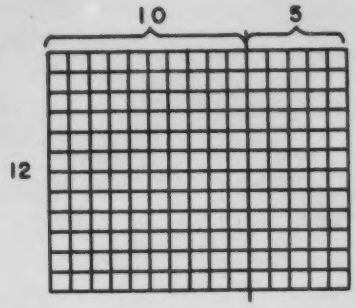
Determina la disposición que representa cada una de las siguientes:



$$\begin{array}{r} 10 \times 15 = 150 \\ 2 \times 15 = 30 \\ \hline 12 \times 15 = 180 \end{array}$$

Hay otras maneras de descomponer la disposición. Observa la siguiente:

$$\begin{aligned} 12 \times 15 &= 12 \times (10 + 5) \\ &= (12 \times 10) + (12 \times 5) \\ &= 120 + 60 \\ &= 180 \end{aligned}$$

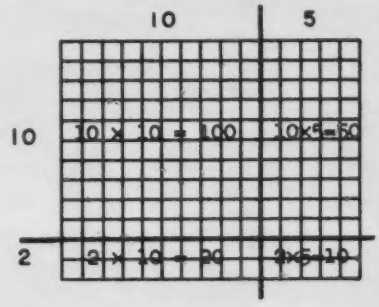


Esta forma vertical nos ayuda a hallar el producto.

$$\begin{array}{rl} 15 & \\ \times\ 12 & \\ \hline 120 & (12 \times 10) \\ 60 & (12 \times 5) \\ \hline 180 & (12 \times 15) \end{array}$$

Veamos otra manera más de descomponer la disposición. Ahora, podemos escribir el producto en forma vertical, de esta manera:

$$\begin{array}{rl} 15 & \\ \times\ 12 & \\ 10 & (2 \times 5) \\ 20 & (2 \times 10) \\ 50 & (10 \times 5) \\ 100 & (10 \times 10) \\ \hline 180 & (12 \times 15) \end{array}$$



Utiliza la manera que te guste más para hallar los productos en el Conjunto de problemas 11. (Mientras más aprendemos a retener, menos necesitamos escribir.)

E362

Conjunto de problemas 11

Halla el numeral decimal que representa n:

1. $12 \times 23 = n$ (n = 276)
2. $11 \times 42 = n$ (n = 462)
3. $14 \times 52 = n$ (n = 728)
4. $15 \times 32 = n$ (n = 480)
5. $32 \times 41 = n$ (n = 1,312)
6. $23 \times 63 = n$ (n = 1,449)
7. $21 \times 78 = n$ (n = 1,638)
8. $31 \times 66 = n$ (n = 2,046)
9. $32 \times 59 = n$ (n = 1,888)
10. $45 \times 45 = n$ (n = 2,025)
11. $37 \times 48 = n$ (n = 1,776)
12. $29 \times 54 = n$ (n = 1,566)

E363

(Opcional)

Algunas veces, las propiedades de la multiplicación pueden emplearse para hallar métodos abreviados de multiplicación. Veamos si puedes explicar los siguientes métodos abreviados:

13. 20
× 78 método abreviado: considera el problema como

78
× 20
1560

14. 33
× 29 método abreviado: considera el problema como

$(30 \times 33) - 33 = 957$

990
- 33
957

15. 101
× 78 método abreviado: considera el problema como

$(100 \times 78) + 78 = 7878$

7800
+ 78
7878

16. 480
× 370 método abreviado: halla 37 × 48, multiplica luego por 100.

$(37 \times 48) \times 100 = 1776 \times 100$
$= 177,600$

Trata de hallar un método abreviado para los siguientes problemas; si no puedes, resuélvelos de la manera acostumbrada:

17. 50
× 49

49
× 50
2450

ó

2500
-50
2450

19. 203
× 32

$(200 \times 32) + (3 \times 32)$
$= 6400 + 96$
$= 6496$

18. 30
× 86

86
× 30
2580

20. 500
× 680

680
× 500
340,000

USO DE LA MULTIPLICACIÓN PARA RESOLVER PROBLEMAS EN FORMA DE CUENTO

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a desarrollar su habilidad para resolver problemas, mediante el uso de enunciados matemáticos en los cuales haya que emplear la multiplicación de números representados por numerales con más de un dígito.

El método de resolver problemas presentado en el Capítulo 3 debe ampliarse y reforzarse con la explicación dada en esta sección.

En resumen, lo que se debe destacar es la relación fundamental dada en un problema. Para resolver problemas, determínese primero qué pregunta debe contestarse. Entonces, utilícese la información dada en el problema para ayudar a escribir un enunciado matemático que exprese la relación entre la información y la pregunta que se va a contestar. Cuando se obtenga el resultado, deberá utilizarse para redactar el enunciado de la respuesta.

E364

USO DE LA MULTIPLICACIÓN PARA RESOLVER PROBLEMAS EN FORMA DE CUENTO

Has resuelto problemas anteriormente.
¿Recuerdas cómo resolvías problemas en forma de cuento?
Utilicemos este problema para ayudarnos a recordar.

Problema: En el circo, los niños de la Escuela Bueso se sentaron en una sección de 15 filas. Se sentaron dieciocho niños en cada fila. ¿Cuántos niños de la Escuela Bueso se sentaron en esta sección?

Resumen de la información: Hay 15 filas y hay 18 niños en cada fila.

Enunciado matemático: $15 \times 18 = n$

Trabajo:

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 15 \\ \hline 40 \\ 50 \\ 80 \\ 100 \\ \hline 270 \end{array}$$

Enunciado de respuesta: 270 niños estaban sentados en esta sección.

Al resolver problemas, necesitas:
Comprender la pregunta que se va a contestar.
Hallar la información dada en el problema, que ha de ayudarte.
Escribir un enunciado matemático que relacione esta información con la pregunta.
Hallar el número desconocido.
Escribir una respuesta a la pregunta del problema.

637 11

E365

Conjunto de problemas 12

1. Los niños de la Escuela Cordero fueron al circo en 6 autobuses. Cuarenta y cinco niños iban en cada uno. ¿Cuántos niños iban en los 6 autobuses?

   $s = 6 \times 45$
   $= 270$

   270 niños iban en los 6 autobuses.

2. Había 424 niños y niñas matriculados en la Escuela Matienzo. Si 270 niños fueron al circo y los otros niños fueron al zoológico, ¿cuántos niños fueron al zoológico?

   $m = 424 - 270$
   $= 154$

   154 niños fueron al zoológico.

3. Un día, había en el zoológico 154 niños de la Escuela Cordero y 168 niños de la Escuela Matienzo. ¿Cuántos niños de las dos escuelas visitaron el zoológico ese día?

   $m = 154 + 168$
   $= 322$

   322 niños visitaron el zoológico.

4. Un crucigrama tenía 15 cuadrados horizontalmente y 12 cuadrados verticalmente. ¿Cuántos cuadrados había en el crucigrama?

   $m = 15 \times 12$
   $= 180$

   El crucigrama contenía 180 cuadrados.

5. Había 360 puntos en una parte de una disposición y 24 puntos en la otra parte. ¿Cuántos puntos había en la disposición completa?

   $s = 360 + 24$
   $= 384$

   Había 384 puntos de la disposición.

6. La puntuación de un juego de balompié es 35 a 17. ¿Cuántos puntos necesita hacer uno de los equipos para empatar la puntuación?

   $t = 35 - 17$
   $= 18$

   Un equipo necesita hacer 18 puntos para empatar la puntuación.

7. La señora Soto compra 14 galones de leche cada mes. ¿Cuántos galones compra en un año?

   $m = 14 \times 12$
   $= 168$

   La señora Soto compra 168 galones de leche en un año.

8. Se compraron 15 galones de helado para la fiesta de Navidad. Si un galón alcanzaba para servir a 26 niños, ¿para cuántos niños alcanzarán los 15 galones?

   $m = 15 \times 26$
   $= 390$

   15 galones de helado alcanzarán para servirle a 390 niños.

E366

9. Había 12 mesas en la cafetería. Si se sentaron 16 niños en cada mesa, ¿a cuántos niños se les pudo servir a un mismo tiempo?
$n = 12 \times 16$
$= 192$
Se pudo servir a 192 niños en total.

10. Se ordenaron 36 cajas de lápices de color para una clase. Cada caja contenía 24. ¿Cuántos lápices había en total?
$m = 36 \times 24$
$= 864$
Había 864 lápices en total.

11. En el área de estacionamiento del parque de pelota, había 24 filas con espacio para 35 automóviles en cada fila. ¿Cuántos automóviles pueden estacionarse en esa área?
$s = 24 \times 35$
$= 840$
En esa área, pueden estacionarse 840 automóviles.

12. Los niños de la Escuela Olimpo emplearon 191 segundos para salir del edificio durante un simulacro de fuego en marzo. En abril, el tiempo fue 186 segundos. ¿Cuánto tiempo más emplearon los niños en salir del edificio en marzo?
$m = 191 - 186$
$= 5$
Emplearon 5 segundos más en salir del edificio en marzo.

13. La señora Pérez preparó 27 jarros de conserva. Si cada jarro contenía 16 onzas, ¿cuántas onzas preparó?
$s = 27 \times 16$
$= 432$
Preparó 432 onzas de conserva.

14. Hay 53 niños y niñas en la clase de Jardín de Infancia de la mañana y 48 en la clase de la tarde. ¿Cuántos niños hay en las dos clases?
$m = 53 + 48$
$= 101$
En las dos clases, hay 101 niños.

15. Cada uno de los 32 niños en la clase de la señorita Paz hizo 18 marbetes de nombres para la fiesta de la clase. ¿Cuántos marbetes hicieron?
$n = 32 \times 18$
$= 576$
Hicieron 576 marbetes.

DETERMINACION DE FACTORES DESCONOCIDOS

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a entender la técnica de la división de números grandes, cuando el número desconocido es un factor.

Los conceptos de "cociente y residuo" y de "división exacta" a menudo se enseñan a la vez. Los alumnos "dividen" 17 por 5 y obtienen un cociente de 3 y un residuo de 2. En símbolos,

$$17 = (5 \times 3) + 2.$$

Si no hay residuo, se dice que la división es "exacta". Un enunciado equivalente, que se utiliza más adelante en esta unidad, es decir que la división exacta es un caso especial de división con residuo, cuando éste es cero:

$$15 = (5 \times 3) + 0$$

En casos más complicados, no se sabe si una división es o no exacta hasta que se obtiene el resultado.

Los conceptos de cocientes y residuos son de gran importancia práctica, pero, en esta unidad, se enseñan después del concepto de división exacta y no a la vez. Las razones para esta separación son las siguientes:

El tratamiento de la aritmética en los Capítulos 3, 4 y 6 se basa en el concepto de operación matemática. El estudiante efectúa la operación de multiplicación con los números 15 y 5 para obtener 75 y la operación de división para obtener 3. En los dos casos, se obtiene un solo número como resultado de la operación. En este sentido, la división en que se obtiene un residuo no es una operación con números cardinales. El resultado de dividir 17 por 5 es dos números cardinales, 3 y 2, y no uno solo. (La idea que se menciona aquí se explica detalladamente en la base matemática que se da para la división con residuos.)

El concepto de una operación matemática y sus propiedades es una idea matemática muy importante que el estudiante debe recordar. Esta idea la encontrará repetidamente a medida que vaya aprendiendo más matemática. También, es el concepto que unifica la enseñanza de los algoritmos fundamentales de adición, sustracción, multiplicación y división.

Exploración:

La multiplicación es una operación con dos números para obtener un tercer número.

> Pónganse algunos ejemplos de enunciados matemáticos en la pizarra que indiquen multiplicación; escríbanse enunciados como $12 \times 6 = n$, $13 \times 16 = p$, $145 \times 26 = q$, u otros que sugieran los estudiantes. Ahora, escríbanse en la pizarra enunciados como los siguientes: $12 = 3 \times n$, $m \times 15 = 165$, $25 \times 5 = 450$.

He aquí algunos enunciados matemáticos. ¿Indican también estos enunciados la operación de multiplicación? (Sí) ¿Cuáles son los factores en cada uno de estos enunciados? (3 y n, m y 15, 25 y s) ¿Cuál es el producto? (12, 165, 450)

¿Cómo difieren éstos de los enunciados que escribimos primero? (En estos enunciados, conocemos solamente uno de los factores y el producto. En los primeros enunciados, conocemos los dos factores, pero no conocemos el producto.)

¿Qué operación se utiliza para obtener el factor desconocido? (La división) Escribamos de otra manera los últimos tres enunciados, utilizando el símbolo de división.

> Escríbanse los enunciados:
>
> $12 \div 3 = n$, $165 \div 15 = m$, $450 \div 25 = s$.
>
> Considérense varias maneras posibles de determinar el factor desconocido en estos enunciados. Sugiérase el uso de la combinación básica de la multiplicación $4 \times 3 = 12$ para determinar el primer factor. Obsérvese que no podemos utilizar las combinaciones básicas de esta manera para determinar los otros factores.

Queremos hallar un método que podamos emplear para determinar m cuando $m = 165 \div 15$ y s cuando $s = 450 \div 25$. Podríamos tratar de determinar m cuando $m = 165 \div 15$, haciendo algunas conjeturas y comprobándolas. Hagan una conjetura. Ensayémosla en el enunciado para determinar si m es 10. ($15 \times 10 = 150$) ¿Es 10 mayor o menor que m? ($10 > m$) Tratemos de ver si m es 20. ($20 \times 10 = 200$) ¿Es 20 mayor o menor que m? ($20 < m$) ¿Cuál podría ser la próxima conjetura? (m es menor que 20 y mayor que 10.) Podemos ensayar con el

enunciado, para ver si m es 15.

Debe continuarse este análisis hasta determinar m y s. Si los alumnos parten de otras conjeturas, debe conducirse el análisis de manera parecida.

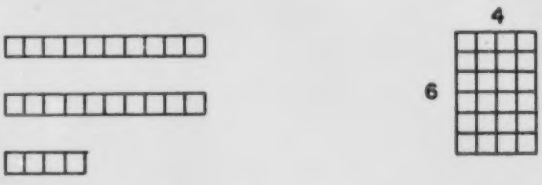
Tuvimos que emplear algún tiempo en hacer conjeturas acerca de los números que m y s representan. Sería más conveniente disponer de un método que pudiera servirnos para tratar con estos números y con números más grandes, sin tener que emplear tanto tiempo en hacer conjeturas.

Para aprender a dividir números como éstos, empecemos resolviendo algunos problemas sencillos de división. Aprender a resolverlos nos ayudará a trabajar con ejercicios más difíciles.

Se puede considerar un enunciado de división como $24 \div 4 = n$. Obsérvese que el enunciado indica que podríamos tener una disposición de 24 elementos. Sabemos que ésta tiene 4 columnas (o 4 elementos en cada fila).

Algunas veces, asociamos este tipo de enunciado, $24 \div 4 = n$, con la información que falta acerca del número de filas. Algunas veces, asociamos un enunciado como $24 \div n = 4$ con la información que falta acerca del número de columnas. Quizás, el maestro quiera introducir esta idea más adelante y proseguir con enunciados de la forma $24 \div 4 = n$ ó $n \times 4 = 24$ solamente. En cualquiera de los casos, determinamos el factor desconocido dividiendo el producto por el otro factor.

Utilizando tarjetas cuadradas, fichas, cuentas u otros objetos parecidos, considérese primero la disposición de 24 elementos como 2 decenas y 4 unidades. Entonces, cámbiese la disposición en otra formada por 4 columnas, cuyo número de filas hay que determinar. Los estudiantes deben tener materiales parecidos para este mismo propósito.



$24 = 6 \times 4$

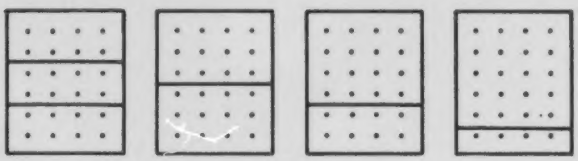
Para $24 \div 4 = n$, podemos decir que $\underline{6} \times 4 = 24$ ó $24 \div 4 = \underline{6}$. También, podemos escribir

$$4 \overline{)\,24}\ \ 6$$

Quizás, el maestro quiera que los estudiantes formen otras disposiciones que sugieren los siguientes enunciados:

$24 \div 8 = n$	$24 \div n = 8$
$24 \div 6 = n$	$24 \div n = 6$
$24 \div 3 = n$	$24 \div n = 3$

Pídase que indiquen cómo podemos representarlos. Obsérvese la disposición de 24 elementos.



A B C D

Podemos considerar la primera disposición (A) como

$$\begin{aligned} 24 \div 4 &= (8 \div 4) + (8 \div 4) + (8 \div 4) \\ &= \quad 2 \quad + \quad 2 \quad \times \quad 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Para la disposición (B),

$$\begin{aligned} 24 \div 4 &= (12 \div 4) + (12 \div 4) \\ &= \quad 3 \quad + \quad 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Para la disposición (C),

$$\begin{aligned} 24 \div 4 &= (16 \div 4) + (8 \div 4) \\ &= \quad 4 \quad + \quad 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Para la disposición (D),

$$\begin{aligned} 24 \div 4 &= (20 \div 4) + (4 \div 4) \\ &= \quad 5 \quad + \quad 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Recuérdese el trabajo parecido que se hizo en el Capítulo 4.

Obsérvese que podemos descomponer un grupo de 24 puntos en grupos más pequeños. Cada grupo debe disponerse de manera que haya 4 elementos en cada fila. Podemos pensar en expresar el producto, utilizando

múltiplos del factor conocido como sumandos. Por ejemplo, 8, 12, 16 y 20 son múltiplos de 4.

Estúdiense otros ejemplos, empleando las combinaciones básicas de la multiplicación y nuestro conocimiento de las propiedades del 10 y el 100 y los múltiplos de 10 y 100 como factores. Algunos ejemplos son:

$$\begin{aligned} 75 \div 5 &= (50 \div 5) + (25 \div 5) \\ &= \quad 10 \quad + \quad 5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 636 \div 6 &= (600 \div 6) + (30 \div 6) + (6 \div 6) \\ &= \quad 100 \quad + \quad 5 \quad + \quad 1 \\ &= 106 \end{aligned}$$

(Quizás, haya que emplear varios días.)

E367

DETERMINACION DE FACTORES DESCONOCIDOS

Trata de hallar los factores desconocidos en estos enunciados. Como ayuda utiliza las combinaciones básicas de la multiplicación.

A		B	
$4 \times n = 36$	$(4 \times 9 = 36)$	$4 \times n = 360$	$(4 \times 90 = 360)$
$n \times 8 = 64$	$(8 \times 8 = 64)$	$n \times 8 = 640$	$(80 \times 8 = 640)$
$n \times 7 = 42$	$(6 \times 7 = 42)$	$n \times 7 = 420$	$(60 \times 7 = 420)$
$2 \times n = 12$	$(2 \times 6 = 12)$	$2 \times n = 1200$	$(2 \times 600 = 1200)$
$5 \times n = 30$	$(5 \times 6 = 30)$	$5 \times n = 3000$	$(5 \times 600 = 3000)$

¿Qué combinación básica de la multiplicación usaste para cada uno?

¿De qué manera te ayudó el encontrar los factores desconocidos en A a encontrar los factores en B?

(Las combinaciones básicas en A me ayudaron a determinar qué múltiplo de 10 ó 100 correspondía en B.)

¿Cómo se puede escribir cada uno de los enunciados en A y B, utilizando el símbolo de la división?

A	B
$36 \div 4 = m$	$360 \div 4 = m$
$64 \div 8 = m$	$640 \div 8 = m$
$42 \div 7 = m$	$420 \div 7 = m$
$12 \div 2 = m$	$1200 \div 2 = m$
$30 \div 5 = m$	$3000 \div 5 = m$

E368

Muchos problemas se resuelven dividiendo un número por otro. He aquí un ejemplo:

Pablo tiene 52 sellos. Puede poner 4 sellos en una fila en su libro. ¿Cuántas filas necesitará, si pone en su libro los 52 sellos?

Queremos hallar el número de filas de sellos.

Hay 4 sellos en cada fila.

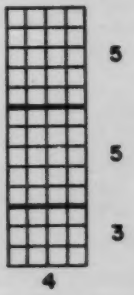
Hay 52 sellos en total.

¿Es $n \times 4 = 52$, donde n representa el número de filas, el enunciado matemático para este problema? (نعم)

Piensa en una disposición.

Los sellos en su libro podrían estar dispuestos como en el cuadro de la derecha. La manera de descomponer la disposición muestra que

$52 = 20 + 20 + 12.$



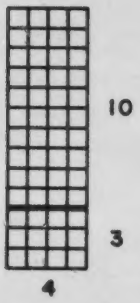
Escribimos:

$$\begin{aligned} 52 \div 4 &= (20 + 20 + 12) \div 4 \\ &= (20 \div 4) + (20 \div 4) + (12 \div 4) \\ &= 5 + 5 + 3 \\ &= 13 \end{aligned}$$

Hay 13 filas de sellos.

E369

Los sellos en su libro podrían también disponerse como en la figura de la derecha.



La manera de descomponer la disposición muestra que $52 = 40 + 12$.

Escribimos:

$$\begin{aligned} 52 \div 4 &= (40 + 12) \div 4 \\ &= (40 \div 4) + (12 \div 4) \\ &= 10 + 3 \\ &= 13 \end{aligned}$$

El número 52 puede escribirse de nuevo de modo que cada sumando sea un múltiplo de 4. Estos números son múltiplos de 4:

4, 8, 16, 20, ...

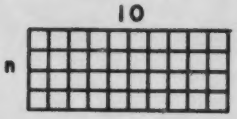
¿Puedes nombrar algunos otros?

Trata algunas otras maneras de nombrar 52.

Conjunto de problemas 13

Halla el número desconocido en cada uno de los siguientes ejercicios:

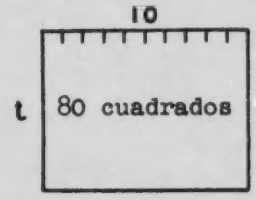
1.



$n \times 10 = 40$

$n =$ (4)

2.



$t \times 10 = 80$

$t =$ (8)

3. $1200 \div 3 = n$

($n = 400$)

4. $810 \div 9 = t$

($t = 90$)

5. $p \times 7 = 35$

($p = 5$)

6. $420 \div 6 = r$

($r = 70$)

7. $q = 640 \div 8$

($q = 80$)

8. $y = 770 \div 7$

($y = 110$)

Conjunto de problemas 14

Escribe de nuevo cada producto, usando múltiplos del factor conocido como sumandos.

Ejemplo 1:

$n = 24 \div 2$

$= (20 + 4) \div 2$

$= (20 \div 2) + (4 \div 2)$

$= 10 + 2$

$= 12$

Ejemplo 2:

$r = 393 \div 3$

$= (300 + 90 + 3) \div 3$

$= (300 \div 3) + (90 \div 3) + (3 \div 3)$

$= 100 + 30 + 1$

$= 131$

1. $48 \div 4 = t$ $(t=12)$
2. $68 \div 2 = s$ $(s=34)$
3. $96 \div 3 = n$ $(n=32)$
4. $64 \div 2 = s$ $(s=32)$
5. $48 \div 2 = m$ $(m=24)$
6. $42 \div 2 = k$ $(k=21)$
7. $h = 88 \div 4$ $(h=22)$
8. $n = 55 \div 5$ $(n=11)$
9. $75 \div 5 = m$ $(m=15)$
10. $63 \div 3 = t$ $(t=21)$
11. $96 \div 6 = r$ $(r=16)$
12. $91 \div 7 = s$ $(s=13)$
13. $112 \div 8 = t$ $(t=14)$
14. $217 \div 7 = w$ $(w=31)$
15. $333 \div 9 = m$ $(m=37)$
16. $400 \div 5 = n$ $(n=80)$
17. $639 \div 3 = k$ $(k=213)$
18. $420 \div 4 = m$ $(m=105)$
19. $770 \div 7 = p$ $(p=110)$
20. $630 \div 6 = t$ $(t=105)$

E372

Conjunto de problemas 15

Escribe enunciados matemáticos para ayudarte a resolver los siguientes problemas. Resuélvelos. Da la respuesta para cada problema, mediante un enunciado.

1. En la exposición de aeronáutica, 40 aviones volaron en formación. Había 10 filas. ¿Cuántos aviones había en cada fila?
   $40 = 10 \times m$
   $m = 4$
   En cada fila, había 4 aviones.
2. Una clase de 36 estudiantes estaba dividida igualmente en 3 comités para planear una fiesta. ¿Cuántos niños había en cada comité?
   $36 = 3 \times t$
   $t = 12$
   En cada comité, había 12 niños.
3. El verdulero puso 60 zanahorias en manojos de 5. ¿Cuántos manojos hizo?
   $60 = 5 \times n$
   $n = 12$
   Hizo 12 manojos de zanahorias.
4. ¿Cuántos días hay en 7 semanas?
   $s = 7 \times 7$
   $s = 49$
   En 7 semanas, hay 49 días.
5. Roberto recibió una asignación de 50¢. La asignación de Jaime es 75¢. ¿Cuánto más dinero recibe Jaime que Roberto?
   $75 - 50 = m$
   $m = 25$
   Jaime recibe 25¢ más que Roberto.
6. ¿50¢ es cuántas veces tanto dinero como 5¢?
   $50 = m \times 5$
   $m = 10$
   50¢ es 10 veces tanto dinero como 5¢.
7. Los 80 hombres en la banda que estaba marchando se dividieron en 8 filas. ¿Cuántos hombres había en cada fila?
   $8 \times t = 80$
   $t = 10$
   Había 10 hombres en cada fila.
8. Un avión de retropropulsión llevaba 42 pasajeros en una sección y 102 pasajeros en otra sección. ¿Cuántos pasajeros había a bordo del avión?
   $m = 42 + 102$
   $m = 144$
   A bordo del avión, había 144 pasajeros.

UNA MANERA DE DIVIDIR DOS NUMEROS

Objetivo: Explicar un algoritmo de división, utilizando como base la idea de que un producto puede expresarse como un múltiplo del factor conocido.

Materiales: Disposiciones apropiadas para comprender la explicación.

En esta lección, repásese con los estudiantes lo que ya saben acerca de la división. Ayúdeseles a pensar en una manera de expresar el producto como suma de los múltiplos del factor conocido, a medida que trabajan.

Quizás, el maestro quiera emplear disposiciones a la vez que analiza enunciados como $24 \div 4 = n$, por ejemplo. El análisis podría conducirse así:

Supongamos que escribimos lo que sucede a medida que formamos una disposición con 4 tarjetas (o cualquier material apropiado) en cada fila. He aquí otra manera de escribir lo que razonamos.

Supóngase que formamos 4 filas de 4 elementos.
Tenemos una disposición 4 por 4 con 16 tarjetas.
Escribimos que hemos formado 4 filas.
También, escribimos que utilizamos 16 de 24 tarjetas.
(En cada paso, obsérvese como escribimos esto.)
Vemos que nos sobran 8 tarjetas.
Formamos 2 filas más de 4.
Escribimos esto. También, escribimos el número de tarjetas que necesitamos para formar 2 filas de 4.
Hemos utilizado todas las tarjetas. De lo que escribimos, vemos que formamos 4 filas y 2 filas.

$4 + 2 = 6$

Forma I

$$\begin{array}{r} 6 \\ 4 \overline{)\,24} \\ -16 \\ \hline 8 \\ -8 \\ \hline 0 \end{array}$$

Forma II

$$\begin{array}{r|l} 4 \overline{)\,24} & \\ -16 & 4 \\ \hline 8 & \\ -8 & 2 \\ \hline 0 & 6 \end{array}$$

Puede utilizarse cualquiera de las dos formas.

Al dividir 24 por 4, los alumnos deben

darse cuenta de que esto equivale a determinar el factor desconocido en $4 \times m = 24$ y, por su conocimiento de las combinaciones básicas de la multiplicación, sabrán que el factor desconocido es 6. Por tanto, para determinar el factor 6, no es necesario representar 24 como suma de dos múltiplos de 4. Pero, nos hemos preparado para estudiar el algoritmo de la división para el cual no podemos determinar inmediatamente el factor desconocido a base del conocimiento de las combinaciones básicas de la multiplicación.

Examínense otros ejemplos, en los que se estudie la manera de escribir lo que sucede al formar una disposición, dado el número de filas o el número de columnas solamente.

Por ejemplo, para

$$42 \div n = 7,$$

tenemos que colocar 42 elementos en 7 filas. Queremos determinar el número de elementos en cada fila o el número de columnas.

Para $72 \div 4 = n$, hay varias maneras de razonar. He aquí algunas, utilizando ambas formas:

I.

```
4 ) 72          4 ) 72          4 ) 72
   -40  | 10        -32  |  8        -40  | 10
    32              40              32
   -20  |  5       -40  | 10        -32  |  8
    12               0  | 18         0  | 18
   -12  |  3
     0  | 18
```

II.

```
   18              18              18
    5               8               3
    3              10               5
   10          4 ) 72           5
4 ) 72           -40             5
  -40            32          4 ) 72
   32            -32            -20
  -12             0              52
   20                           -20
  -20                           32
    0                          -20
                               12
                               -12
                                0
```

Obsérvese la manera de expresar 72 como una

suma.

$$72 \div 4 = (40 + 20 + 12) \div 4$$
$$= (32 + 40) \div 4$$
$$= (40 + 32) \div 4$$

Aún no nos interesa una forma abreviada.

653

E373

UNA MANERA DE DIVIDIR DOS NUMEROS

Hemos aprendido que podemos darle un nuevo nombre al producto y dividir para hallar el factor desconocido.

$$\begin{aligned} n &= 225 \div 9 \\ &= (180 + 45) \div 9 \\ &= (180 \div 9) + (45 \div 9) \\ &= \quad 20 \quad + \quad 5 \\ &= 25 \end{aligned}$$

He aquí otra manera de indicar la división.

Enunciado matemático:

$$n = 225 \div 9$$

Forma I:

```
      25
       5
      20
9 ) 225
   -180      <-------- (20 x 9) -------->
     45
    -45      <-------- (5 x 9) --------->
      0
```

Forma II:

```
9 ) 225
   -180 | 20
     45 |
    -45 |  5
      0 | 25
```

Puedes usar una u otra forma de las que se muestra arriba.

Ahora, sabemos que

$25 \times 9 = 225$ ó que $225 \div 9 = 25$.

E374

Conjunto de problemas 16

Usa la forma I o la forma II para hallar el número desconocido en cada enunciado:

1. $45 + 3 = n$ $(n = 15)$
2. $76 + 4 = n$ $(n = 19)$
3. $84 + 3 = n$ $(n = 28)$
4. $96 + 8 = n$ $(n = 12)$
5. $72 + 3 = n$ $(n = 24)$
6. $69 + 3 = n$ $(n = 23)$
7. $84 + 7 = n$ $(n = 12)$
8. $60 + 12 = n$ $(n = 5)$
9. $96 + 3 = n$ $(n = 32)$
10. $132 + 6 = n$ $(n = 22)$
11. $444 + 6 = n$ $(n = 74)$
12. $m = 207 + 9$ $(m = 23)$
13. $325 + 5 = p$ $(p = 65)$
14. $376 + 8 = q$ $(q = 47)$

MAS INFORMACION ACERCA DE LA DIVISION DE DOS NUMEROS

Objetivos: Aprender a dividir cuando los productos son números más grandes, utilizando múltiplos del factor conocido que contiene decenas y centenas

Adquirir más destreza en la manera de representar el producto

Exploración:

> Quizás, el maestro quiera explicar esta lección analizando algunos de los diferentes métodos que se utilizaron para trabajar uno de los ejemplos. Sígase la forma que están empleando los estudiantes.

(a)
```
  74
   4
  20
  50
6 ) 444
 300
 144
 120
  24
  24
   0
```

(b)
```
  74
   4
  70
6 ) 444
 420
  24
  24
   0
```

(c)
```
  74
   4
  10
  60
6 ) 444
 360
  84
  60
  24
  24
   0
```

(a)
```
6 ) 444 |
 300    | 50
 144    |
 120    | 20
  24    |
  24    |  4
   0    | 74
```

(b)
```
6 ) 444 |
 420    | 70
  24    |
  24    |  4
   0    | 74
```

(c)
```
6 ) 444 |
 360    | 60
  84    |
  60    | 10
  24    |
  24    |  4
   0    | 74
```

¿Es el factor desconocido el mismo en cada uno de los casos? (Sí, es 74.)

¿Cómo se representó 444 en (a)? Señálense los sumandos, a medida que se representa 444 de otra manera. (Primero utilizamos 444 = 300 + 144 y. después, 444 = 300 + 120 + 24. Entonces, ¿qué hicieron? (Dividimos 300 por 6, 120 por 6 y 24 por 6.) ¿Cuáles fueron los resultados? (Los resultados fueron 50, 20 y 4. Estos se sumaron para obtener el factor desconocido, 74.)

¿Cómo se representó 444 en (b)? (444 = 420 + 24) Entonces, ¿qué hicieron? (Dividimos 420 por 6 y 24 por 6.) ¿Cuáles fueron los resultados? Los resultados fueron 70 y 4. Estos dos números se sumaron para obtener el factor desconocido, 74.)

¿Cómo se representó 444 en (c)? (Primero, se utilizó 444 = 360 + 84 y, luego, 444 = 360 + 60 + 24. Entonces, ¿qué hicieron? Dividimos 360 por 6, 60 por 6 y 24 por 6.) ¿Cuáles fueron los resultados? (Los resultados fueron 60, 10 y 4. Estos se sumaron para obtener el factor, 74.)

Obsérvese que todos estos métodos de obtener 74 son correctos. Sin embargo, el trabajo será más fácil, si consideramos los múltiplos más grandes del factor conocido, en decenas o centenas, etc.

Resuélvanse algunos problemas con la clase, como, por ejemplo,

$$528 \div 8 = n$$

```
8 ) 528 |
    480 | 60
    ---
     48 |
     48 |  6
    ---
      0 | 66
```

$100 \times 8 = 800$ y este número es mayor que 528.

Obténganse los productos de 8 y algunos múltiplos de 10:

$10 \times 8 = 80$
$20 \times 8 = 160$
$50 \times 8 = 400$
$60 \times 8 = 480$
$70 \times 8 = 560$

```
  66
   6
  60
8 ) 528
    480
    ---
     48
     48
    ---
      0
```

¿Qué producto deberemos utilizar, si elegimos el más grande que no sea mayor que 528? (480)

Quizás, el maestro quiera considerar otros ejemplos, antes de que los estudiantes resuelvan el Conjunto de problemas 17 independientemente.

E375

MAS INFORMACION ACERCA DE LA DIVISION DE DOS NUMEROS

Has visto que hay varias maneras de nombrar un producto, al dividir. He aquí algunas maneras que quizás has utilizado para hallar qué número multiplicado por 6 da 444.
$n \times 6 = 444$. Utilizando la división, escribimos:
$444 \div 6 = n$. Puedes utilizar una u otra de estas formas.

Forma I.

(a)
```
  74
   4
  20
  50
6 ) 444
  300
  144
  120
   24
   24
    0
```

(b)
```
  74
   4
  10
  60
6 ) 444
  360
   84
   60
   24
   24
    0
```

(c)
```
  74
   4
  70
6 ) 444
  420
   24
   24
    0
```

Forma II.

(a)
```
6 ) 444
  300 | 50
  144
  120 | 20
   24
   24 |  4
    0 | 74
```

(b)
```
6 ) 444
  360 | 60
   84
   60 | 10
   24
   24 |  4
    0 | 74
```

(c)
```
6 ) 444
  420 | 70
   24
   24 |  4
    0 | 74
```

¿En cuál se ha representado 444 como (300 + 120 + 24)? (a)

¿En cuál se ha representado 444 como (360 + 60 + 24)? (b)

¿En cuál se ha representado 444 como (420 + 24)? (c)

E376

Conjunto de problemas 17

Divide:

1. $3 \overline{)249}$ (93)
2. $4 \overline{)284}$ (71)
3. $8 \overline{)736}$ (92)
4. $5 \overline{)365}$ (73)
5. $6 \overline{)390}$ (65)
6. $7 \overline{)518}$ (74)
7. $7 \overline{)392}$ (56)
8. $6 \overline{)378}$ (63)
9. $4 \overline{)184}$ (46)
10. $3 \overline{)252}$ (84)
11. $9 \overline{)342}$ (38)
12. $8 \overline{)664}$ (83)
13. $5 \overline{)450}$ (90)
14. $3 \overline{)291}$ (97)
15. $7 \overline{)343}$ (49)
16. $9 \overline{)711}$ (79)
17. $6 \overline{)594}$ (99)
18. $7 \overline{)679}$ (97)
19. $8 \overline{)704}$ (88)
20. $9 \overline{)801}$ (89)

USO DE LA DIVISION PARA RESOLVER PROBLEMAS EN FORMA DE CUENTO

Exploración:

> Antes de que los estudiantes empiecen a resolver el Conjunto de problemas 18, estúdiense en clase algunos problemas que se resuelvan mediante la división de dos números, a fin de que puedan leer y entender con provecho este tipo de problema.
>
> Puede empezarse la lección, pidiendo a los estudiantes que recuerden lo que saben acerca de la resolución de "problemas en forma de cuento". Las ideas importantes que deben analizarse son las siguientes:
> 1. Leer el problema detenidamente.
> 2. Determinar cuál es la pregunta que hay que contestar. 3. Buscar la información relacionada con la pregunta. (Quizás, sea necesario leer el problema nuevamente.)
> 4. Escribir un enunciado que utilice esta información para contestar la pregunta.
> 5. Estudiar el enunciado matemático para determinar qué operación hay que emplear.
> 6. Efectuar los cálculos. 7. Redactar un enunciado que conteste la pregunta del problema.
>
> Después que los estudiantes hayan recordado las ideas anteriores relacionadas con la resolución de problemas, escríbase lo siguiente en la pizarra:

Una clase de cuarto grado que consta de 24 alumnos, visitó un museo. Se utilizaron 6 automóviles para llevar a los alumnos. Si en cada automóvil iba el mismo número de alumnos, ¿cuántos había en cada automóvil?

¿Qué pregunta se plantea? (¿Cuántos alumnos había en cada automóvil?)

¿Qué información se da? (Hay 24 alumnos en la clase. Se utilizaron seis automóviles para llevar a los alumnos al museo.)

¿Qué enunciado matemático puede escribirse que utilice esta información para contestar la pregunta? ($6 \times n = 24$ ó $24 \div 6 = n$) Determinen la respuesta a la pregunta. ¿Qué enunciado puede redactarse para dar la respuesta? (En cada automóvil, había 4 alumnos.)

Determinaron el número de alumnos en cada automóvil. Podemos dividir, cuando queremos saber cuántos elementos hay en cada uno de varios conjuntos iguales cuya reunión es un conjunto dado.

¿Podrán resolver el siguiente problema?

Excríbase el problema en la pizarra.

En el museo, los alumnos se dividieron en grupos de 8. ¿Cuántos grupos de alumnos se formaron?

¿Qué pregunta se plantea? (¿Cuántos grupos de alumnos se formaron?)

¿Qué información nos ayuda a contestar la pregunta? (Hay 24 alumnos. Estos se dividieron en grupos de 8.)

¿Qué enunciado matemático puede escribirse que utilice esta información para contestar la pregunta? ($8 \times n = 24$ ó $24 \div 8 = n$) Determinen la respuesta a la pregunta. ¿Qué enunciado puede redactarse para dar la respuesta? (Hay 3 grupos de alumnos.)

Determinaron que había 3 grupos de alumnos. En cada grupo, había el mismo número de alumnos. Podemos dividir, cuando queremos saber cuántos grupos del mismo tamaño hay.

¿Cuáles son los dos tipos de problemas en los cuales podemos dividir? (1. Podemos dividir, si conocemos el número de conjuntos con el mismo número de elementos en cada uno y queremos saber cuál es este número. 2. Podemos dividir, si sabemos cuántos elementos hay en cada conjunto y queremos saber cuántos conjuntos hay.)

En los problemas anteriores, los estudiantes pudieron utilizar las combinaciones básicas de la multiplicación para obtener la respuesta. Ahora, estúdiense los siguientes ejemplos en los que se pueden utilizar algoritmos de división.

Ahora, examinemos un ejemplo en el que intervienen números más grandes.

Escríbase este problema en la pizarra.

Los guardas de un parque contaron 420 venados a los cuales tendrían que alimentar durante el invierno. Decidieron agrupar los venados en 3 grupos con el mismo número en cada grupo. ¿Cuántos venados había en cada grupo?

Sígase el mismo procedimiento que se utilizó con los otros ejemplos.

E377

USO DE LA DIVISION PARA RESOLVER PROBLEMAS EN FORMA DE CUENTO

Hay 108 árboles frutales en un huerto. Hay 9 filas de árboles con el mismo número de árboles en cada fila. ¿Cómo puedes hallar el número de árboles que hay en cada fila?

La información dada en el problema es:

Hay 108 árboles.

Hay 9 filas.

Cada fila tiene el mismo número de árboles.

La pregunta que deseamos contestar es:

¿Cuántos árboles hay en cada fila?

Redactemos un enunciado matemático para mostrar cómo se relacionan los datos en el problema. Sea n el número de árboles en cada fila.

$$9 \times n = 108, \quad \underline{\text{ó}} \quad n = 108 \div 9$$

En el enunciado matemático, 108 es el producto, 9 es el factor conocido, y n es el factor desconocido. Podemos encontrar n, dividiendo 108 por 9. Tu respuesta deberá ser 12, de manera que

$$9 \times 12 = 108.$$

Escribimos ahora la respuesta mediante el siguiente enunciado:

Hay 12 árboles en cada fila.

En este problema acerca de los árboles, hay 108 árboles en el conjunto. El conjunto de 108 árboles se divide en 9 conjuntos, con el mismo número en cada grupo. Hallaste el número de árboles en cada uno de los 9 conjuntos. Este número era 12. Usaste la división para hallar el número de árboles en cada conjunto.

Ahora, consideremos otro problema. Supongamos que hay 822 perros en una gran exposición de perros. Un oficial nos dice que hay seis castas distintas de perros en la exposición. También, nos dice que hay el mismo número de perros de cada casta. ¿Cuántos perros de cada casta hay en la exposición?

La información contenida en el problema es:

Hay 822 perros en la exhibición.

Hay 6 castas de perros en la exposición.

El número de perros de cada casta es el mismo.

La pregunta que deseamos contestar es:

¿Cuántos perros hay de cada casta?

Escribamos un enunciado matemático. Sea n el número de perros de cada casta. $6 \times n = 822$, ó $n = 822 \div 6$.

En el enunciado matemático, 822 es el producto, 6 es el factor conocido, y n es el factor desconocido. Podemos hallar n, dividiendo 822 por 6. Presentamos la división, utilizando cualquiera de las siguientes formas:

```
  137
    7
   30
  100
6 ) 822
  600
  222
  180
   42
   42
    0
```

6) 822		
600	100	
222		
180	30	
42		
42	7	
0	137	

El enunciado de respuesta es: Hay 137 perros de cada casta en la exposición.

En este problema acerca de perros, hay 822 perros en el conjunto. Hay 6 conjuntos con el mismo número en cada grupo. Hallamos el número de perros en cada conjunto, dividiendo 822 por 6.

E379

Conjunto de problemas 18

Redacta enunciados matemáticos que te ayuden a resolver los siguientes problemas y resuélvelos. Da la respuesta para cada problema, mediante un enunciado.

1. La familia López está planeando un viaje de 510 millas. Si disponen de 5 días para viajar, ¿alrededor de cuántas millas deben recorrer cada día?

   $5 \times m = 510$
   $m = 102$
   o $m = 510 \div 5$

   La familia López debe recorrer 102 millas cada día.

2. Siete aviones de retropropulsión salieron un día del aeropuerto. Cada uno tenía a bordo 128 pasajeros. ¿Cuántas personas salieron del aeropuerto ese día en aviones de retropropulsión?

   $m = 7 \times 128$
   $m = 896$

   896 personas salieron del aeropuerto en aviones de retropropulsión ese día.

3. Como tares de "explorador" Juan hizo una colección de 144 conchas pequeñas. Las colocó en 6 cajas, poniendo el mismo número de conchas en cada una. ¿Cuántas colocó en cada caja?

   $m \times 6 = 144$
   $m = 24$
   o $144 \div 6 = m$

   Colocó 24 conchas en cada caja.

4. Ana recogió 126 hojas para un proyecto de la escuela. Las montó en 9 cartelones. ¿Cuántas hojas montó en cada cartelón?

   $m \times 9 = 126$
   $126 \div 9 = m$
   $m = 14$

   montó 14 hojas en cada cartelón.

5. Hay 189 niños exploradores repartidos en 9 tropas. Si cada tropa tiene el mismo número de miembros, ¿cuántos niños hay en cada tropa?

   $m \times 9 = 189$
   $189 \div 9 = m$
   $m = 21$

   Hay 21 niños en cada tropa.

6. La madre de Lola horneó 186 galletitas para una excursión. Las colocó en tres cajas, poniendo el mismo número en cada una. ¿Cuántas colocó en cada caja?

   $m \times 3 = 186$
   o $186 \div 3 = m$
   $m = 62$

   Colocó 62 galletitas en cada caja.

7. Diego y Tomás ofrecieron hacer los boletos para la función de marionetas. Hicieron 139 boletos el martes, 125 el miércoles y 127 el jueves. ¿Cuántos boletos hicieron los niños en total?

$m = 139 + 125 + 127$
$m = 391$

Los niños hicieron 391 boletos.

8. El restaurante tenía dos cuartos comedores. Uno tenía cabida para 220 personas, el otro para 175 personas. ¿Cuántas personas más podían comer en un cuarto comedor que en el otro?

$m = 220 - 175$
$m = 45$

45 personas más podían comer en un cuarto comedor que en el otro.

9. Si se conducen 27 visitantes en un grupo por el edificio de un capitolio del estado, ¿cuántos visitantes van en 13 grupos?

$m = 13 \times 27$
$m = 351$

351 visitantes van en 13 grupos.

10. Si una caja de latas que contienen sopa pesa 24 libras, ¿cuánto pesarán 48 cajas?

$m = 24 \times 48$
$m = 1152$

48 cajas pesarán 1152 libras.

11. Un comité de 7 alumnos recogió 455 piedras, mientras trabajaba en un proyecto de la clase. Si cada alumno recogió el mismo número de piedras, ¿cuántas piedras halló cada uno?

$7 \times s = 455$
o
$s = 455 \div 7$
$s = 65$

Cada alumno halló 65 piedras.

12. Hay 9 niños en nuestra tropa de exploradores. Los niños recogieron 477 juguetes durante su campaña anual de juguetes. Si cada niño recogió el mismo número de juguetes, ¿cuántos juguetes recogió cada niño?

$9 \times t = 477$
o
$t = 477 \div 9$
$t = 53$

Cada niño recogió 53 juguetes.

MAS PRACTICA EN LA DIVISION DE NUMEROS

Objetivo: Proporcionar más práctica con la división y, al mismo tiempo, aprender a dividir, cuando el producto y el factor desconocido son mayores que 100.

Exploración:

Quizás, el maestro quiera dejar la exploración de las técnicas de la multiplicación y la división en algún momento conveniente y repasar o explicar algunas ideas geométricas. Esto le dará tiempo a los estudiantes de asimilar las propiedades y técnicas que se han explicado.

El propósito de esta unidad es ayudar a los estudiantes a aprender la técnica de la división que consiste en representar el producto como suma, para luego dividir cada sumando con el fin de obtener el factor desconocido.

Los alumnos deben mejorar su práctica en la representación de un producto como una suma para dividir, pero no se debe esperar que todos logren adquirir el mismo nivel de destreza en esta etapa. He aquí algunos ejemplos de lo que puede esperarse, en orden de preferencia:

```
      89                89                89                89
       9                11                10                 9
      80                 8                10                60
4 ) 356           4 ) 356           4 ) 356           4 ) 356
    320               280               240                80
     36                76               116               276
     36                32                40               240
                       44                76                36
                       44                40                36
                                         36
                                         36
```

A continuación, sa dan sugerencias que pueden servir de guía en la explicación de cómo se divide, cuando el producto es mayor que 100 veces el factor desconocido. Muéstrese el trabajo en la pizarra.

¿Cuál es el primer paso al dividir 472 por 4? (Representamos 472 como una suma, de modo que podamos dividir cada sumando por el factor conocido.) (Sabemos que $4 \times 100 = 400$. El primer sumando del nombre de 472 es 400.) ¿Por qué elegimos 400 en lugar de un sumando más pequeño? (Elegimos 400 porque es el mayor múltiplo de 100 que no es mayor que 472.) Los dos sumandos de la nueva representación de 472 son 400 y 72.

```
      100
4 ) 472
    400
     72
```

```
4 ) 472
    400  | 100
     72  |
```

¿Es la división completa? (No, podemos dividir 400 por 4 solamente. Nos queda dividir 72 por 4.) ¿Cómo representamos 72 en forma de suma? (Puede representarse como $40 + 32$, $36 + 36$, $28 + 44$, etc.) Todos esos nombres pueden utilizarse. ¿Cuál será el más conveniente? ($40 + 32$) ¿Necesitamos, en realidad, hallar otro nombre de 72? (No, si sabemos que $72 \div 4 = 18$.) Dividan cada sumando por 4. ($40 \div 4 = 10$; $32 \div 4 = 8$.) Muestren esta división en la pizarra e indiquen cuál es el factor desconocido.

```
      118
        8
       10
      100
4 ) 472
    400
     72
     40
     32
     32
      0
```

ó

```
4 ) 472
    400  | 100
     72  |
     40  |  10
     32  |
     32  |   8
      0  | 118
```

¿Cómo se representó 472? ($400 + 40 + 32$) (Señálense estos sumandos en el trabajo que aparece en la pizarra. Indíquese dónde se escribió $400 \div 4$ y dónde se escribieron $40 \div 4$ y $32 \div 4$. Indíquese dónde se escribió $472 \div 4$.)

Resolvamos otro ejemplo juntos.

$3 \overline{)\ 867}$

¿Será, al menos 100, el factor desconocido? (Sí, $3 \times 100 = 300$.) ¿Será, al menos 200, el factor desconocido? (Sí, $3 \times 200 = 600$.) ¿Será, al menos 300, el factor desconocido? (No, $3 \times 300 = 900$. 300 es demasiado grande. Utilizaremos 600 como un sumando, al representar 867 como una suma. ¿Cuál es el otro sumando? (267, puesto que $867 = 600 + 267$.)

$$\begin{array}{r} 200 \\ 3 \overline{)\ 867} \\ -\ 600 \\ \hline 267 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 \overline{)\ 867} & \\ -\ 600 & 200 \\ \hline 267 & \end{array}$$

¿Qué sumando hay que dividir por 3 aún? (267) ¿Podremos representar 267 como una suma de números, de manera que cada uno sea un múltiplo de 10 y también un múltiplo de 3? ¿Cuáles son algunos números que son múltiplos de 3 y de 10? (Algunos de esos números son 30, 60, 90.) ¿Cuál es el mayor de estos números que es menor que 267? (240) ¿Podemos utilizar 240 como uno de los sumandos al representar 267 como una suma? ¿Es 27 el otro sumando? (Sí) ¿Podremos dividir 27 por 3? (Sí) ¿Representamos 867 como $600 + 240 + 27$? (Sí)

Ahora, podemos indicar los pasos del proceso de división de cualquiera de las dos maneras siguientes:

Forma I

$$\begin{array}{r} 289 \\ 9 \\ 80 \\ 200 \\ 3 \overline{)\ 867} \\ 600 \\ 267 \\ 240 \\ 27 \\ 27 \\ 0 \end{array}$$

Forma II

$$\begin{array}{r|l} 3 \overline{)\ 867} & \\ 600 & 200 \\ \hline 267 & \\ 240 & 80 \\ \hline 27 & \\ 27 & 9 \\ \hline 0 & 289 \end{array}$$

$867 \div 3 = 289$

¿Significa esto que $289 \times 3 = 867$? (Sí.) Multipliquen 289

por 3 y vean si el producto es 867. Siempre, podemos comprobar nuestro trabajo mediante la multiplicación.

Estudiemos otros ejemplos para decidir de qué manera podemos empezar a resolver un problema de división.

(a) $5 \overline{)\,1620}$ (b) $8 \overline{)\,9280}$ (c) $4 \overline{)\,3124}$

¿Podemos determinar, con sólo examinar estos ejemplos, cuántos dígitos tendrá el numeral que representa el factor desconocido? ¿Cuántos dígitos tendrá el resultado del ejemplo (a)? (Tres, porque $5 \times 100 < 1620$, pero $5 \times 1000 > 1620$; de modo que el factor desconocido será mayor que 100 y menor que 1,000.) ¿Cuántos dígitos tendrá el resultado del ejemplo (b)? (Cuatro, porque $8 \times 1000 < 9,280$, pero $8 \times 10,000 > 9,280$; de modo que el factor desconocido será mayor que 1,000 y menor que 10,000.) ¿Cuántos dígitos había en el resultado del ejemplo (c)? (Tres, porque $4 \times 100 < 3,124$ y $4 \times 1000 > 3124$, de modo que el factor desconocido será mayor que 100 y menor que 1000.)

Saber cuántos dígitos hay en el numeral que representa el factor desconocido nos ayuda a empezar a resolver un problema de división. En el ejemplo (a), sabemos que el factor desconocido tiene que estar entre 100 y 1,000. ¿Qué múltiplos de 100, al multiplicar por 5, dan un número que no sea mayor que 1620? (100, 200, 300) Podemos utilizar esto para empezar.

$$\begin{array}{r} 300 \\ 5 \overline{)\,1620} \\ \underline{1500} \\ 120 \end{array} \qquad \text{ó} \qquad \begin{array}{r|l} 5 \overline{)\,1620} & \\ \underline{1500} & 300 \\ 120 & \end{array}$$

Ahora, pídase a los estudiantes que indiquen cómo completar la división de 1620 por 5.

Entonces, deberá orientárseles para que hagan preguntas análogas, con el fin de determinar el mayor múltiplo de 1000 que puede multiplicarse por 8 para obtener un número no mayor que 9,280, en el ejemplo (b) y el mayor múltiplo de 100 que puede multiplicarse por 4 para obtener un número que no sea mayor que 3124, en el ejemplo (c).

E381

MAS PRACTICA EN LA DIVISION DE NUMEROS

La clase de cuardo grado tenía 1720 pulgadas de cuerda. Querían cortarla en pedazos de 8 pulgadas cada uno. ¿Cuántos pedazos obtendrán?

Enunciado matemático: $1720 \div 8 = n$ o $n \times 8 = 1720$

Podemos tratar este problema de varias maneras. He aquí tres.

Forma I:

(a)
```
 215
   5
  60
 100
  50
8 ) 1720
    400
   1320
    800
    520
    480
     40
     40
      0
```

(b)
```
 215
   5
  10
 100
 100
8 ) 1720
    800
    920
    800
    120
     80
     40
     40
      0
```

(c)
```
 215
   5
  10
 200
8 ) 1720
   1600
    120
     80
     40
     40
      0
```

¿Es (c) la más corta de las tres maneras?

Hay 215 pedazos de cuerda.

E382

Forma II:

(a)

8) 1720	
400	50
1320	
800	100
520	
480	60
40	
40	5
0	215

(b)

8) 1720	
800	100
920	
800	100
120	
80	10
40	
40	5
0	215

(c)

8) 1720	
1600	200
120	
80	10
40	
40	5
0	215

¿Es (c) la más corta de las tres maneras?

E383

Conjunto de problemas 19

Halla el factor que falta:

1. $340 \div 4 = n$ (n = 85)
2. $567 \div 9 = n$ (n = 63)
3. $1435 \div 5 = n$ (n = 287)
4. $1056 \div 8 = n$ (n = 132)
5. $372 \div n = 6$ (n = 62)
6. $504 \div 7 = t$ (t = 72)
7. $474 \div m = 6$ (m = 79)
8. $420 \div 4 = p$ (p = 105)
9. $369 \div 3 = n$ (n = 123)
10. $2240 \div 4 = m$ (m = 560)
11. $5250 \div m = 7$ (m = 750)
12. $8280 \div 9 = t$ (t = 920)
13. $3616 \div 8 = n$ (n = 452)
14. $3560 \div 2 = n$ (n = 1780)
15. $4362 \div 3 = k$ (k = 1454)
16. $8960 \div 8 = s$ (s = 1120)
17. $5761 \div 7 = m$ (m = 823)
18. $3768 \div 4 = t$ (t = 942)
19. $9384 \div 6 = p$ (p = 1564)
20. $9639 \div 9 = s$ (s = 1071)

Conjunto de problemas 20

Escribe enunciados matemáticos que te ayuden a resolver los siguientes problemas y resuélvelos. Da la respuesta para cada problema mediante un enunciado.

1. Si un avión vuela 1675 millas en 5 horas, ¿aproximadamente qué distancia vuela en una hora?
   $m = 1675 \div 5$
   $m = 335$
   El avión recorre 335 millas en una hora.
2. ¿Cuántas rosquillas hay en 17 docenas?
   $m = 17 \times 12$
   $m = 204$
   Hay 204 rosquillas en 17 docenas.
3. Para el carnaval de la escuela, las madres repartieron en bolsas 600 dulces hechos en la casa. Pusieron 5 dulces en cada bolsa. ¿Cuántas bolsas repartieron?
   $m = 600 \div 5$
   $m = 120$
   Repartieron 120 bolsas de dulces.
4. El Club de los Padres compró 720 barras de helado para obsequiar a los niños de la Escuela Central. Ese día, había 669 niños presentes. ¿Cuántas barras extra había?
   $m = 720 - 669$
   $m = 51$
   Había 51 barras de helado extra.
5. Una motocicleta recorrió 234 millas con 6 galones de gasolina. ¿Cuántas millas recorrió con cada galón?
   $m = 234 \div 6$
   $m = 39$
   Recorrió 39 millas con cada galón.
6. En un mercado, se colocaron 1744 cebollas en manojos de 8 cebollas cada uno. ¿Cuántos manojos había?
   $s = 1744 \div 8$
   $s = 218$
   Había 218 manojos de cebollas.
7. Un tendero ordenó 726 botellas de refrescos. Se entregaron en cajas de seis botellas. ¿Cuántas cajas se entregaron?
   $t = 726 \div 6$
   $t = 121$
   Se entregaron 121 cajas de refrescos.

DETERMINACION DE COCIENTES Y RESIDUOS

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a entender la técnica de la división con residuo y el enunciado matemático que describe este procedimiento de división: $a = (b \times q) + r$ o $a = (q \times b) + r$, donde a es el producto dado, b es el factor conocido, q es el factor desconocido, r es el residuo y r es menor que b.

La operación de división se definió como la determinación de un factor desconocido n en una multiplicación: ($5 \times n = 40$, $n = 40 \div 5$). Una división como $39 \div 5$ es imposible en el conjunto de los números cardinales. No obstante, en muchos casos, es conveniente determinar: a) el mayor múltiplo de 5 que es menor que 39 (35), b) el correspondiente factor desconocido (7), y c) la diferencia entre 39 y a (4). Toda esta información puede indicarse en el enunciado $39 = (7 \times 4) + 4$.

Tan pronto como se explique el concepto de los números racionales, no hay necesidad de distinguir entre el término "división" y la frase "determinación de cocientes y residuos"; debido a que $39 \div 5 = \frac{39}{5}$ y el contenido de $39 = (7 \times 5) + 4$ puede representarse por la fracción $7\frac{4}{5}$, que es otro nombre de $\frac{39}{5}$.

Por ahora, utilizamos los números cardinales solamente. En consecuencia, encontramos una dificultad al explicar la división con residuo. Los estudiantes saben que una operación matemática con números cardinales opera con un par de números cardinales para obtener como resultado un tercer número cardinal. ($10 + 5 = 15$, $10 - 5 = 5$, $10 \times 5 = 5$, $10 \div 5 = 2$.) Por tanto, no sería correcto decir que el enunciado matemático $39 = (7 \times 5) + 4$ ó $39 = (5 \times q) + r$, representa una operación con el par de números 39 y 5, pues se obtienen dos números, 7 y 4, y no uno. En consecuencia, es conveniente que se emplee la expresión "Determinación de cocientes y residuos" para los casos en que la división no es posible en el conjunto de los números cardinales. De este modo, el estudiante

asociará la expresión "determinación de un factor desconocido" con la operación de división. Dicha expresión será relacionada con casos como "135 dividido por 12" en que tenemos que determinar los números que representan q y r en el enunciado matemático

$$135 = (q \times 12) + r.$$

En resumen, dados dos números cardinales cualesquiera, por ejemplo 96 y 6, si hay un número cardinal n tal que $6 \times n = 96$, decimos que 96 es el producto, 6 el factor conocido y n el factor desconocido. El factor desconocido n se obtiene dividiendo 96 por 6 y escribimos $n = 96 \div 6$. Esta es la operación de división.

Ahora, si, por ejemplo, consideramos los números 98 y 6, no hay un número cardinal n tal que $6 \times n = 98$, pero siempre hay un número cardinal q y un número cardinal r $(r < 6)$ tales que

$$98 = (q \times 6) + r,$$

donde $r < 6$. Determinar los números q y r es "determinar el cociente q y el residuo r". Evidentemente, q es 16 y r es 2 y

$$98 = (16 \times 6) + 2.$$

Exploración:

Hemos considerado varios problemas de división y conocemos varios casos en los que hay que dividir. He aquí un problema para que lo resuelvan: "Diecisiete niños quieren celebrar una carrera de relevos, con cinco niños en cada equipo.

Se colocan en filas, con cinco niños en cada fila. ¿Cuántos equipos habrá? "

Figura 16

Expliquen el dibujo. (Hay 3 equipos de 5 niños cada uno y sobran 2 niños que no pueden participar en la carrera.) ¿Cuántos niños participarán en la carrera? (15) ¿Cuántos equipos participarán? (3)

¿Representa una disposición el dibujo? (No) ¿Por qué no? (Una disposición tiene que tener el mismo número de elementos en

cada fila y hay solamente 2 elementos en la última fila.)

¿Pueden ver dos disposiciones en el dibujo? (Puede verse una disposición 3 por 5. Podríamos describir la otra parte como una disposición. ¿Qué representa cada una de las disposiciones en el problema? (La disposición 3 por 5 representa los 15 niños que participarán en la carrera. La disposición 1 por 2 representa los 2 niños que no participarán.)

Escriban un enunciado matemático que indique lo que hemos hallado. [17 =(3 × 5) + (1 × 2)]. Cada uno de los números en este enunciado es importante. Indiquen qué significa cada uno de ellos en el problema. (17 es el número de niños. Estos pueden formar 3 equipos de 5 niños cada uno y sobran 2 niños que no participarán en la carrera.)

¿Qué números se dieron en el problema? (17 y 5) ¿Qué números faltan en el problema? (3 y 2)

Podemos resolver problemas como éste, haciendo una figura y descomponiéndola en disposiciones. El resultado puede describirse mediante un enunciado. El resultado puede utilizarse para contestar la pregunta del problema.

Si se necesita otro ejemplo detallado, puede utilizarse el siguiente:

Resolvamos juntos el problema siguiente: "22 niños quieren jugar al béisbol, siguiendo estrictamente las reglas. ¿Cuántos equipos pueden formar y cuántos niños estarán de reserva?"

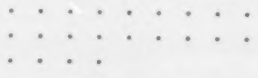


Figura 17

¿Representa una disposición la figura? (No, representa dos disposiciones.) Expliquen la figura. (Hay 2 equipos de 9 jugadores y 4 jugadores de reserva.) ¿Cuántos niños forman los dos equipos? (18)

Expliquen el uso de cada disposición. (La disposición 2 por 9 representa los 18 niños que jugarán. La disposición 1 por 4 representa los 4 niños que estarán de reserva.)

Escriban un enunciado matemático que indique cómo se organizaron los 22 niños. [22 = (2 × 9) + 4]. La disposición más

pequeña tendrá siempre 1 fila o 1 columna. No tenemos que escribir 1×4.

Contesten las preguntas del problema. (Pueden formarse 2 equipos, con 4 jugadores de reserva.)

¿Qué números se dieron en el problema? (22 y 9) ¿Qué números faltaban en el problema? (2 y 4)

Consideremos el siguiente problema: Si el conserje de la escuela colocó 50 sillas en filas de 4 sillas cada una, ¿cuántas filas pudo formar?

Sin hacer un dibujo, ¿pueden escribir un enunciado matemático que indique cómo pudo el conserje disponer las 50 sillas en filas de 4 sillas cada una? $[50 = (12 \times 4) + 2]$. ¿Cómo colocarían las sillas? (Se colocarían en 12 filas de 4 sillas cada una y sobrarían 2 sillas sin usar.) Escriban varios enunciados que indiquen varias maneras de disponer las 50 sillas.

He aquí algunas sugerencias:

(a) $50 = (10 \times 5) + 0$ (d) $50 = (7 \times 7) + 1$
(b) $50 = (9 \times 5) + 5$ (e) $50 = (11 \times 4) + 6$
(c) $50 = (8 \times 6) + 2$ (f) $50 = (25 \times 2) + 0$

Cada uno de esos enunciados indica tres cosas. ¿Cuáles son? (Cada enunciado indica el número de filas que podrían formarse, el número de sillas en una fila y el número de sillas que sobran.

Explíquese un procedimiento para determinar q y r, utilizando el mismo método mediante el cual se determinó el factor desconocido:

Forma I.

$$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 4 \;)\; 50 \\ 40 \\ \hline 10 \\ 8 \\ \hline 2 \end{array}$$

Forma II.

$$\begin{array}{r|l} 4 \;)\; 50 & \\ 40 & 10 \\ \hline 10 & \\ 8 & \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 2 & 12 \end{array}$$

Indíquense cuáles son los números q y r y escríbase el enunciado matemático

$$50 = (12 \times 4) + 2.$$

Pueden darse ejemplos parecidos para 3 sillas en cada fila, etc. Obsérvese que r es siempre menor que el divisor. (A menos que sepamos que dos números son factores de un tercer número, no es apropiado escribir enunciados como $12 \div 5 = n$, a no ser que queramos indicar que no hay solución, si n ha de representar un número cardinal.)

Utilícense otros ejemplos en esta exploración.

E385

DETERMINACION DE COCIENTES Y RESIDUOS

Podemos utilizar el proceso de la división para resolver problemas como el siguiente:

Hay 306 personas en la exposición. Va a haber 4 excursiones. ¿Cuántas personas deberían ir en cada excursión para tener más o menos el mismo número de personas en cada grupo?

Enunciado matemático: $306 = (4 \times n) + r$

Puedes utilizar cualquiera de las formas siguientes:

Forma I.

$$\begin{array}{r} 76 \\ 6 \\ 70 \\ 4\overline{)306} \\ \underline{280} \\ 26 \\ \underline{24} \\ 2 \end{array}$$

Forma II.

$$\begin{array}{r|l} 4\overline{)306} & \\ \underline{280} & 70 \\ 26 & \\ \underline{24} & 6 \\ 2 & 76 \end{array}$$

$$306 = (76 \times 4) + 2$$

Cada grupo deberá tener 76 personas. Hay 2 personas que deben unirse a uno o dos de los grupos.

En un enunciado matemático como

$$306 = (76 \times 4) + 2,$$

decimos que:

306 es el dividendo.
76 es el cociente.
4 es el divisor.
2 es el residuo.

Conjunto de problemas 21

Halla los números que deben representar q y r para hacer cada enunciado cierto:

1. $632 = (q \times 9) + r$
   $632 = (\underline{70} \times 9) + \underline{2}$

2. $456 = (q \times 3) + r$
   $456 = (\underline{152} \times 3) + \underline{0}$

3. $1576 = (q \times 5) + r$
   $1576 = (\underline{315} \times 5) + \underline{1}$

4. $1242 = (q \times 8) + r$
   $1242 = (\underline{155} \times 8) + \underline{2}$

5. $943 = (q \times 7) + r$
   $943 = (134 \times 7) + 5$

6. $1210 = (q \times 6) + r$
   $1210 = (201 \times 6) + 4$

7. $421 = (q \times 3) + r$
   $421 = (140 \times 3) + 1$

8. $(q \times 4) + r = 3320$
   $(830 \times 4) + 0 = 3320$

9. $299 = (q \times 7) + r$
   $299 = (42 \times 7) + 5$

10. $151 = (q \times 4) + r$
    $151 = (37 \times 4) + 3$

11. $525 = (q \times 8) + r$
    $525 = (65 \times 8) + 5$

12. $373 = (q \times 5) + r$
    $373 = (74 \times 5) + 3$

Conjunto de problemas 22

Escribe enunciados matemáticos como ayuda para resolver los siguientes problemas y resuélvelos. Da la respuesta para cada problema mediante un enunciado.

1. 29 niños desean organizar equipos de 5 niños para una carrera de relevo. ¿Cuántos equipos se pueden organizar? ¿Cuántos niños no correrán?
   $29=(q\times5)+r$
   $29=(5\times5)+4$
   Se pueden organizar 5 equipos. 4 niños no podrán correr.
2. Si el conserje de la escuela colocó 80 sillas en filas de 10 sillas cada una, ¿cuántas filas pudo formar? ¿Habría alguna silla que no se usó?
   $80=(q+10)+r$
   $80=(8+10)+0$
   El conserje pudo formar 8 filas. Utilizó todas las sillas.
3. La Escuela compró 25 pelotas nuevas. Las pelotas se van a repartir, de modo que cada uno de 6 salones de clase reciban la misma cantidad. Si sobran algunas, se guardarán para el próximo año. ¿Cuántas pelotas obtendrá cada salón?
   $25=(q+6)+r$
   $25=(4\times6)+1$
   Cada salón obtendrá 4 pelotas. Se guardará 1 pelota para el próximo año.
4. "Polka para Tres" es un baile en grupos de 3. ¿Cuántos grupos pueden formarse en una clase de 32 niños? ¿Cuántos niños no bailarán?
   $32=(q\times3)+r$
   $32=(10\times3)+2$
   Pueden formarse 10 grupos en una clase de 32 niños. Dos niños no podrán bailar.
5. María invitó 30 niñas a su fiesta. ¿Cuántas mesas deberá tener, si sirvirá a 4 en cada mesa? ¿Cuántas niñas tendrán que sentarse en el sofá para comer?
   $30=(q\times4)+r$
   $30=(7\times4)+2$
   María deberá tener 7 mesas. 2 niñas tendrán que sentarse en el sofá para comer.
6. Se hicieron 271 reservaciones para un almuerzo. ¿Cuántas mesas tendrían que prepararse, si se iban a sentar 4 personas en cada mesa?
   $271=(q\times4)+r$
   $271=(67\times4)+3$
   Tendrían que prepararse 68 mesas. Habrá 67 mesas llenas y 1 mesa de 3 personas.

REPASO Y AMPLIACION

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a perfeccionar su habilidad para resolver problemas mediante el uso de enunciados matemáticos.

> El método de resolver problemas especialmente estudiado en el Capítulo 3 y recalcado en esta unidad, deberá ampliarse y reforzarse mediante la exploración que sigue.
>
> Se debe procurar que los estudiantes razonen debidamente al utilizar los resultados obtenidos mediante el proceso de división para contestar la pregunta planteada en el problema.

Exploración:

Ya han resuelto varios problemas en los que se necesita emplear el proceso de división. Estudiaremos otros que contienen números más grandes y consideraremos la manera de mejorar nuestra habilidad para resolver problemas.

Analizaremos algunos de los problemas del Conjunto de problemas 23.

1. Un repostero va a empacar 1250 bizcochitos para una jira. Pondrá 8 en cada caja. ¿Cuántas cajas ordenará?

2. Cada una de 15 niñas exploradoras vendió 24 cajas de galletitas. ¿Cuántas cajas se vendieron?

3. Si se necesitan seis hojas de papel de colores para un folleto, ¿cuántos folletos pueden hacerse con 500 hojas de papel de colores?

4. La Asociación de padres y maestros de una escuela tenía 324 miembros el año pasado y 296 miembros este año. ¿Cuántos miembros más se necesitan para igualar el número del año pasado?

Lean el problema (1). ¿Qué información se da en el problema? (Se van a empacar 1250 bizcochitos, colocando 8 en cada una de varias cajas.) Escriban esto en la forma de un enunciado matemático. ($1250 = q \times 8$.) ¿Habrá un residuo? (No podemos decirlo.) ¿Cómo se indica esto en el enunciado? [$1250 = (q \times 8) + r$] ¿Nos dice el enunciado la operación que hay que utilizar para determinar q? (Sí, debemos dividir 1250 por 8.)

Escriban el enunciado matemático en sus hojas de papel. Entonces, dividan para determinar r. Contesten la pregunta planteada. (Necesitará 156 cajas para colocar todos los bizcochitos, salvo 2, para los cuales necesitará 1 caja más. En total, necesitará 157 cajas.)

Los alumnos pueden utilizar cualquiera de las dos formas para hacer su trabajo.

$$1250 = (q \times 8) + r$$

```
      156
       6
      50
     100
8 ) 1250
    800
    450
    400
     50
     48
      2
```

ó

```
8 ) 1250
    800   | 100
    450
    400   |  50
     50
     48   |   6
      2   | 156
```

$$1250 = (156 \times 8) + 2$$

El repostero debe ordenar 157 cajas.

Los alumnos deberán resolver también los problemas (2), (3) y (4) en grupo o individualmente. La siguiente exploración debe estudiarse, después que los alumnos hayan completado los primeros cuatro problemas del Conjunto de problemas 23.

Escribamos en la pizarra los cuatro enunciados matemáticos que utilizamos en los problemas, de manera que podamos estudiarlos.

(1) $1250 = (q \times 8) + r$ (2) $m = 15 \times 24$

(3) $500 = (q \times 6) + r$ (4) $296 + n = 324$

Cada uno de los enunciados que escribieron es de un tipo diferente. ¿Cómo supieron qué enunciados debían escribir? (Hay varias respuestas posibles.)

¿Por qué escribieron $1250 = (q \times 8) + r$ para representar la relación entre los números, dada en el problema (1)? (El repostero empaca 1250 bizcochitos en q cajas, colocando 8 bizcochitos en cada caja. La r se añadió para representar los bizcochitos que sobraran.

¿Por qué escribieron $m = 15 \times 24$ para representar la relación entre los números del problema (2)? (Había 15 niñas que vendieron 24 cajas cada una. Pensamos en una disposición 15 por 24.)

¿Por qué escribieron $500 = (q \times 6) + r$ en el problema (3)? (Las 500 hojas de papel se utilizaron para hacer q folletos de 6 hojas. La r se añadió para representar las hojas que sobraran.

¿Por qué se escribe $296 + n = 324$ para el problema (4)? (Las palabras del problema nos dicen que 296 y algunos nuevos miembros hacen en total 324.)

Han resuelto cuatro problemas, determinando la respuesta a la pregunta en cada uno. ¿Qué operación utilizaron para resolver cada uno de esos problemas? (En uno se utilizó la adición, en otro la multiplicación y en otros dos la división.) ¿Cómo supieron qué operación utilizar? (El enunciado matemático nos indicó la operación apropiada.)

Examinen su trabajo en los dos problemas en que utilizaron la división.

(1) $1250 = (q \times 8) + r$

$$
\begin{array}{r}
156 \\
6 \\
50 \\
100 \\
8\overline{)1250} \\
800 \\
\hline
450 \\
400 \\
\hline
50 \\
48 \\
\hline
2
\end{array}
\qquad \text{ó} \qquad
\begin{array}{r|l}
8\overline{)1250} & \\
800 & 100 \\
\hline
450 & \\
400 & 50 \\
\hline
50 & \\
48 & 6 \\
\hline
2 & 156
\end{array}
$$

$1260 = (8 \times 156) + 2$

El repostero deberá ordenar 157 cajas.

(3) $500 = (q \times 6) + r$

$$
\begin{array}{r}
83 \\
3 \\
80 \\
6\overline{)500} \\
480 \\
\hline
20 \\
18 \\
\hline
2
\end{array}
\qquad \text{ó} \qquad
\begin{array}{r|l}
6\overline{)500} & \\
480 & 80 \\
\hline
20 & \\
18 & 3 \\
\hline
2 & 83
\end{array}
$$

$500 = (83 \times 6) + 2$

Se pueden hacer 83 folletos y sobran 2 hojas.

El número 157 que dieron como respuesta al problema (1) no aparece en el trabajo. ¿Por qué no? (El factor desconocido es 156 y hay un residuo de 2. Determinamos que sobrarían 2 bizcochitos, si no se utilizaba otra caja.) Deben analizar bien la situación al contestar preguntas de problemas como éste.

El número 83 utilizado en la respuesta al problema (3) aparece en el trabajo de división que hicieron. ¿Por qué no tomaron en cuenta el residuo?

(Puesto que se necesitaban 6 hojas de papel para cada folleto, se podían hacer 83 folletos solamente. Las 2 hojas sobrantes no bastaban para hacer otro folleto.)

El problema indicaba cómo utilizar el residuo. Al resolver problemas, es conveniente atenerse a las palabras del problema como guía.

Conjunto de problemas 23

1. Un repostero va a empacar 1250 bizcochitos para una jira. Pondrá 8 en cada caja. ¿Cuántas cajas ordenará?

   $1250 = (q \times 8) + r$ Ordenará 157 cajas.

   $1250 = (156 \times 8) + 2$

2. Cada una de 15 niñas exploradoras vendió 24 cajas de galletitas. ¿Cuántas cajas se vendieron?

   $m = 15 \times 24$

   $m = 210$ Se vendieron 218 cajas de galletitas.

3. Si se necesitan seis hojas de papel de colores para un folleto, ¿cuántos folletos pueden hacerse con 500 hojas de papel de colores?

   $500 = (q \times 6) + r$ Pueden hacerse 83 folletos y sobran 2 hojas de papel.

   $500 = (83 \times 6) + 2$

4. La Asociación de padres y maestros de una escuela tenía 324 miembros el año pasado y 296 miembros este año. ¿Cuántos miembros más se necesitan para igualar el número del año pasado?

   $296 + m = 324$ Se necesitan 28 miembros más.

   $m = 28$

5. En una biblioteca escolar, había 23 conjuntos de libros. Había 35 libros en cada conjunto. ¿Cuántos libros había en los 23 conjuntos?

   $t = 23 \times 35$ Había 805 libros

   $t = 805$

6. Guillermo sembró 12 filas de plantas de tomates. Había 15 plantas en cada fila. ¿Cuántas plantas sembró Guillermo?

   $S = 12 \times 15$ Guillermo sembró

   $S = 180$ 180 plantas.

7. Los niños de la Escuela Gautier Benítez están recogiendo dinero para comprar un aparato de televisión que cuesta $350. Han recogido $179. ¿Cuánto dinero más necesitan?

   $350 = 179 + m$ necesitan $171 más.

   $m = 171$

E389

8. Sara está haciendo algunas decoraciones para una fiesta. Necesita 360 cuentas blancas, 720 cuentas rojas, 180 cuentas verdes y 45 cuentas amarillas. ¿Cuántas cuentas necesita en total?
$m = 360 + 720 + 180 + 45$
$m = 1305$
necesita 1305 cuentas.

9. Si un avión de retropropulsión vuela 408 millas en una hora, ¿qué distancia volará en 5 horas?
$m = 5 \times 408$
$m = 2040$
El avión volará 2,040 en 5 horas.

10. Había 385 boletos para ser distribuidos en paquetes de 8. ¿Cuántos paquetes habrá? ¿Cuántos boletos sobrarán?
$385 = (q \times 8) + r$
$385 = (48 \times 8) + 1$
Habrá 48 paquetes de boleto y sobrará 1 boleto.

11. En un ejercicio de lectura, María leyó 284 palabras en 3 minutos. ¿Cuántas palabras leyó en un minuto?
$284 = (q \times 3) + r$
$284 = (94 \times 3) + 2$
María leyó entre 94 y 95 palabras por minuto.

12. Un agricultor embaló 360 cajas de manzanas para embarque. Cada caja pesaba 45 libras. ¿Cuál era el peso de todas las cajas?
$m = 360 \times 45$
$m = 16,200$
Las cajas pesaban 16,200 libras.

13. Los 573 niños exploradores que asistieron a la reunión nacional durmieron en tiendas de campaña que tenían 4 camas. ¿Cuántas tiendas de campaña necesitarían los 573 escuchas?
$573 = (q \times 4) + r$
$573 = (143 \times 4) + 1$
Necesitarán 144 tiendas.

14. 630 bailarines asistieron al Festival de bailes folklóricos. ¿En cuántos grupos de 8 pudieron distribuirse?
$630 = (q \times 8) + r$
$630 = (78 \times 8) + 6$
Pudieron distribuirse en 78 grupos; 6 personas no pudieron bailar.

E390

Conjunto de problemas 24

Halla los números que deben representar q y r para hacer cierto cada enunciado:

1. $994 = (q \times 8) + r$
   $994 = (124 \times 8) + 2$
2. $889 = (q \times 7) + r$
   $889 = (127 \times 7) + 0$
3. $290 = (q \times 9) + r$
   $290 = (32 \times 9) + 2$
4. $493 = (q \times 5) + r$
   $493 = (98 \times 5) + 3$
5. $389 = (q \times 4) + r$
   $389 = (97 \times 4) + 1$
6. $534 = (q \times 5) + r$
   $534 = (106 \times 5) + 4$
7. $954 = (q \times 4) + r$
   $954 = (238 \times 4) + 2$
8. $588 = (q \times 6) + r$
   $588 = (98 \times 6) + 0$
9. $6769 = (q \times 9) + r$
   $6769 = (752 \times 9) + 1$
10. $3626 = (q \times 4) + r$
    $3626 = (906 \times 4) + 2$
11. $290 = (q \times 9) + r$
    $290 = (32 \times 9) + 2$
12. $5308 = (q \times 7) + r$
    $5308 = (758 \times 7) + 2$
13. $7449 = (q \times 8) + r$
    $7449 = (931 \times 8) + 1$
14. $3636 = (q \times 8) + r$
    $3636 = (454 \times 8) + 4$
15. $2390 = (q \times 6) + r$
    $2390 = (398 \times 6) + 2$
16. $1235 = (q \times 5) + r$
    $1235 = (247 \times 5) + 0$
17. $2770 = (q \times 3) + r$
    $2770 = (923 \times 3) + 1$
18. $477 = (q \times 9) + r$
    $477 = (53 \times 9) + 0$
19. $6792 = (q \times 7) + r$
    $6792 = (970 \times 7) + 2$
20. $493 = (q \times 3) + r$
    $493 = (164 \times 3) + 1$

E391

Ejercicios de práctica

I. Coloca los paréntesis correctamente para hacer ciertos los siguientes enunciados matemáticos:

Ejemplo: $24 + 6 - 5 = 25$, $(24 + 6) - 5 = 25$

a) $6 \times 9 + 4 = 58$ [$(6 \times 9) + 4 = 58$]

b) $27 + 13 + 4 = 10$ [$(27 + 13) \div 4 = 10$]

c) $9 \times 6 + 4 = 90$ [$9 \times (6 + 4) = 90$]

d) $7 \times 8 + 8 = 112$ [$7 \times (8 + 8) = 112$]

e) $7 + 63 + 9 = 14$ [$7 + (63 \div 9) = 14$]

f) $5 \times 40 + 8 = 208$ [$(5 \times 40) + 8 = 208$]

g) $7 \times 9 - 4 = 35$ [$7 \times (9 - 4) = 35$]

h) $35 - 7 + 4 = 7$ [$(35 - 7) \div 4 = 7$]

i) $43 + 7 + 5 = 10$ [$(43 + 7) \div 5 = 10$]

j) $54 + 9 + 6 = 12$ [$(54 \div 9) + 6 = 12$]

II. Escribe el número que n representa:

a) $n + 4 = 276$ ($n = 1104$)

b) $693 - n = 445$ ($n = 248$)

c) $224 = n \times 7$ ($n = 32$)

d) $859 = 384 + n$ ($n = 475$)

e) $n = 8 \times 317$ ($n = 2,536$)

f) $392 + n = 1748$ ($n = 1,356$)

g) $798 - n = 344$ ($n = 454$)

h) $511 + 7 = n$ ($n = 73$)

i) $786 + n = 974$ ($n = 188$)

j) $457 + 1066 + 5461 = n$ ($n = 6,984$)

E392

III. Suma:

25	496	589	32
38	447	9	200
46	582	899	8923
59	785	8938	32
(168)	697	275	3709
	(3,007)	(10,710)	(12,907)

Resta:

7010	8300	610	9001
6258	7519	352	3729
(752)	(781)	(258)	(5,272)

Multiplica:

358	868	69	98
7	8	38	89
(2,506)	(6,944)	(2,622)	(8,722)

Divide:

9) 2250	7) 1408	8) 7749	6) 3456
(250)	(201 r 1)	(968 r 5)	(576)

IV. En la tabla a continuación escribe un enunciado matemático, luego resuélvelo.

Par de números	Operación	Enunciado	Resultado
25, 40	adición	25 + 40 = a	a = 65
a) 34, 26	multiplicación	34×26=m	m=884
b) 917, 49	sustracción	917-49=m	m=868
c) 972, 6	división	972÷6=m	m=162
d) 845, 766	adición	845+766=m	m=1,611
e) 896, 47	multiplicación	896×47=m	m=42,112
f) 3442, 2461	sustracción	3442-2461=m	m=981
g) 828, 9	división	828÷9=m	m=92
h) 9, 8289	multiplicación	9×8289=m	m=74,601
i) 23334, 6666	adición	23334+6666=m	m=30,000
j) 768, 8	división	768÷8=m	m=96

E393

V. Reagrupando, halla el sumando desconocido.

Ejemplo: $462 = 400 + 60 + 2 = 400 + 50 + 12$

$\underline{-157} = 100 + 50 + 7 = \underline{100 + 50 + 7}$

$300 + 0 + 5 = 305$

a) $386 = 300+60+6 = 300+70+16$
$\underline{-219} = 200+10+9 = 200+10+9$

b) $633 = 600+30+3 = 500+130+3$
$\underline{563} = 500+60+3 = 500+60+3$

c) $393 = 300+90+3 = 300+80+13$
$\underline{216} = 200+10+6 = 200+10+6$

d) $761 = 700+60+1 = 700+50+11$
$\underline{257} = 200+50+7 = 200+50+7$

VI. Resuelve los siguientes problemas:

a) $85 \times 27 = n$ $(m=2,295)$
b) $n + 5 = 405$ $(m=2,025)$
c) $9 \times 847 = n$ $(m=7,623)$
d) $352 + n = 900$ $(m=548)$
e) $27 + 5 + 8 = n$ $(m=40)$
f) $126 + 3 = n$ $(m=42)$
g) $600 - n = 568$ $(m=32)$
h) $876 + 889 = n$ $(m=1,765)$
i) $726 + 8 = n$ $(m=90\ r\ 6)$
j) $9000 - 3402 = n$ $(m=5,598)$

VII. Resuelve:

a) $n + 9 = 97$ $(m=88)$
b) $89 + 95 + 96 = n$ $(n=280)$
c) $10 \times 85 = n$ $(m=850)$
d) $671 + 9 = n$ $(m=74\ r\ 5)$
e) $6040 - n = 2159$ $(m=3,881)$
f) $6 \times 7008 = n$ $(m=42,048)$
g) $108 + 5 = n$ $(m=21\ r\ 3)$
h) $65 + 54 + 51 + 70 + 33 = n$ $(m=273)$
i) $n + 7 = 96$ $(m=672)$
j) $422 + 6 = n$ $(m=70\ r\ 2)$

VIII. Resuelve los siguientes problemas:

a) $393 + 8 = n$ $(m=49\ r\ 1)$
b) $67 \times 36 = n$ $(m=2,412)$
c) $64 + 48 + 9 + 85 = n$ $(m=206)$
d) $29 + n = 86$ $(m=57)$
e) $8 \times 1321 = n$ $(m=10,568)$
f) $680 + 807 + 739 = n$ $(m=2,226)$
g) $n + 279 = 871$ $(m=592)$
h) $542 - 498 = n$ $(m=44)$
i) $547 \div 9 = n$ $(m=60\ r\ 7)$
j) $n + 5 = 5030$ $(m=25,150)$

E394

IX. Resuelve:

a) $63 \times 80 = n$ (n=5,040)

b) $40 + 23 + 16 = n$ (n=79)

c) $n + 4 = 49$ (n=196)

d) $97 + n = 2005$ (n=1,908)

e) $57 + 30 + 91 = n$ (n=178)

f) $278 + 7 = n$ (n=39 r5)

g) $19 \times 69 = n$ (n=1,311)

h) $357 + 249 + 610 + 8 = n$ (n=1,324)

i) $338 + 5 = n$ (n=67 r3)

j) $201 + 4 = n$ (n=50 r1)

PROBLEMAS DIFICILES

1. He aquí una operación imaginaria llamada "corte". El símbolo para corte es $\wedge$. Mediante estos ejemplos trata de hallar el significado de

a) $8 \wedge 4 = 1$ c) $10 \wedge 5 = 1$ e) $2 \wedge 2 = 0$

b) $9 \wedge 3 = 2$ d) $20 \wedge 4 = 4$ f) $3 \wedge 1 = 2$

¿Qué número representa n en cada uno de los siguientes?

g) $35 \wedge 7 = n$ i) $63 \wedge 7 = n$ k) $36 \wedge 6 = n$

h) $32 \wedge 8 = n$ j) $56 \wedge 8 = n$ l) $49 \wedge 7 = n$

(Divide el primer número por el segundo y resta uno de la respuesta.)

2. Otra operación imaginaria se llama "ler". El símbolo para ler es $\int$. Mediante estos ejemplos trata de hallar el significado de $\int$.

a) $6 \int 2 = 3$ c) $10 \int 2 = 7$ e) $5 \int 1 = 3$

b) $12 \int 3 = 8$ d) $8 \int 7 = 0$ f) $7 \int 1 = 5$

¿Qué número representa n en cada uno de los siguientes?

g) $25 \int 22 = n$ i) $152 \int 151 = n$ k) $13 \int 6 = n$

h) $17 \int 5 = n$ j) $72 \int 1 = n$ l) $27 \int 7 = n$

(Del primer número, resta uno más que el segundo número.)

Repaso

CONJUNTO I

Parte A

1. Utiliza uno de los símbolos = , > o < para hacer ciertos los siguientes enunciados:

   Ejemplo: si $n + 2 = 7$, entonces $n \underline{(<)} 7$

   a) Si $27 + n = 9$, entonces $n \underline{(=)} 3$

   b) Si $n + 12 = 17$, entonces $n \underline{(<)} 17$

   c) Si $n \times 15 = 45$, entonces $n \underline{(>)} 1$

   d) Si $50 - n = 50$, entonces $n \underline{(=)} 0$

   e) Si $128 \div n = 32$, entonces $n \underline{(=)} 4$

   f) Si $n \times 33 = 132$, entonces $n \underline{(<)} 33$

   g) Si $n \div 7 = 4$, entonces $n \underline{(>)} 4$

   h) Si $1407 + n = 2989$, entonces $n \underline{(>)} 1407$

   i) Si $143 = (2 \times 71) + n$, entonces $n \underline{(<)} 2$

   j) Si $n - 6357 = 653$, entonces $n \underline{(>)} 6357$

2. Redacta un enunciado matemático para "neutralizar" la operación indicada en cada uno de los siguientes enunciados:

   Ejemplo: $7 + 2 = n$, $(7 + 2) - 2 = n$

   a) $31 + 4 = n$ $((31+4)-4 = n)$

   b) $12 \times 6 = n$ $((12 \times 6) \div 6 = n)$

   c) $15 \div 3 = n$ $((15 \div 3) \times 3 = n)$

   d) $423 + 172 = n$ $((423+172)-172 = n)$

   e) $72 - 13 = n$ $((72-13)+13 = n)$

   f) $64 \div 8 = n$ $((64 \div 8) \times 8 = n)$

   g) $125 - 25 = n$ $((125-25)+25 = n)$

   h) $3 \times 3 = n$ $((3 \times 3) \div 3 = n)$

   i) $427 \div 7 = n$ $((427 \div 7) \times 7 = n)$

   j) $3592 - 1782 = n$ $((3592-1782)+1782 = n)$

3. Para cada combinación básica de la multiplicación, escribe dos combinaciones básicas de la división.

   Ejemplo: $2 \times 6 = 12$, $12 \div 6 = 2$, $12 \div 2 = 6$

   a) $6 \times 7 = 42$ $(42 \div 6 = 7)$ $(42 \div 7 = 6)$

   b) $7 \times 8 = 56$ $(56 \div 7 = 8)$ $(56 \div 8 = 7)$

   c) $8 \times 9 = 72$ $(72 \div 8 = 9)$ $(72 \div 9 = 8)$

   d) $3 \times 8 = 24$ $(24 \div 3 = 8)$ $(24 \div 8 = 3)$

   e) $6 \times 9 = 54$ $(54 \div 9 = 6)$ $(54 \div 6 = 9)$

   f) $8 \times 6 = 48$ $(48 \div 8 = 6)$ $(48 \div 6 = 8)$

   g) $7 \times 4 = 28$ $(28 \div 7 = 4)$ $(28 \div 4 = 7)$

   h) $9 \times 5 = 45$ $(45 \div 9 = 5)$ $(45 \div 5 = 9)$

   i) $4 \times 8 = 32$ $(32 \div 4 = 8)$ $(32 \div 8 = 4)$

   j) $9 \times 7 = 63$ $(63 \div 9 = 7)$ $(63 \div 7 = 9)$

E396

4. Escribe las palabras correctas o numerales para completar la siguiente tabla:

Par de números	Resultado	Operación	Resultado	Operación
a) 40, 25	65	adición	15	sustracción
b) 72, 8	9	(división)	576	(multiplicación)
c) 96, 8	(84)	sustracción	12	(división)
d) 84, 23	1932	(multiplicación)	(107)	adición
e) 369, 9	378	(adición)	(41)	división
f) 80, 12	(92)	adición	(68)	sustracción
g) 45, 5	225	(multiplicación)	9	(división)
h) 90, 9	81	(sustracción)	(810)	multiplicación

5. B ∪ E = {rojo, azul, blanco, verde, púrpura}
   B ∩ E = { }
   E = {verde, púrpura}

   ¿Qué operación podrías utilizar para hallar el número de miembros en el conjunto B? (sustracción) Nombra los miembros del conjunto B. (rojo, azul, blanco)

6. A ∪ G = {2, 4, 5, 6, 3, 7}
   A ∩ G = {5, 6, 7}
   G = {5, 6, 7}

   ¿Podrías utilizar la sustracción para hallar el número de miembros en el conjunto A? (no) Nombra los miembros del conjunto A. (2, 3, 4, 5, 6, 7)

7. C = {2, 4, 6, 8}
   O = {1, 3, 5, 7, 9}

   Nombra los miembros del conjunto C ∪ O. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
   ¿Qué operación podrías utilizar para hallar el número de miembros en C ∪ O? (adición)

8. Dibuja un polígono que sea la reunión de

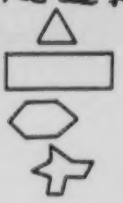
a) 2 segmentos de recta (No es posible.)

b) 3 segmentos de recta

c) 4 segmentos de recta

d) 6 segmentos de recta

e) 10 segmentos de recta



9. ¿Cuántos vértices tiene cada polígono en el problema 8?
(a. ninguno b. tres c. cuatro d. seis e. diez

10. Halla el número que n representa en cada uno de los siguientes enunciados. El a) se trabajó como ejemplo.

a) $53 + 22 + n = 89$, $53 + 22 = 75$, $89 - 75 = 14$, $n = 14$

b) $24 + 30 + n = 79$ ($n = 25$)

c) $43 + n + 25 = 87$ ($n = 19$)

d) $n + 9 + 30 + 27 = 152$ ($n = 86$)

e) $798 + 9 + n = 1504$ ($n = 697$)

f) $59 + 497 + n + 7 = 1069$ ($n = 506$)

g) $34 + n + 11 = 68$ ($n = 23$)

h) $275 + 596 + n = 1716$ ($n = 845$)

i) $16 + n + 66 = 96$ ($n = 14$)

j) $n + 669 + 352 = 1021$ ($n = 0$)

k) $88 + 7 + n = 174$ ($n = 79$)

E398

11. Aparea cada uno de los términos de la columna I con un modelo de la columna II.

Columna I Idea	Columna II Modelo
1) Punto (e)	a) La senda o camino que recorro cuando paseo alrededor del bloque y regreso al punto de partida.
2) Segmento de recta (b)	b) Un pedazo de cuerda tenso
3) Recta (i)	c) El borde de un vaso para beber
4) Rayo (h)	d) Un campo de balompié
5) Plano (g)	e) La punta de un compás
6) Curva cerrada simple (a)	f) Las aristas de una loseta
7) Polígono (f)	g) La superficie de un lago apacible cuyas orillas no se pueden ver
8) Circunferencia (c)	h) La luz de una estrella lejana
9) Región del plano (d)	i) Un camino estrecho recto cuyos extremos no se ven

Parte B

Redacta un enunciado matemático (o dos enunciados si es necesario), para cada problema y resuélvelo; da la respuesta mediante un enunciado:

1. El autobús de la calle del Rey hace tres viajes de ida y vuelta cada hora. ¿Cuántos minutos se emplearán en un viaje de ida y vuelta?
$60 \div 3 = m$ (se emplearán 20 minutos.)
$3 \times m = 60$
$m = 20$

2. La cafetería de la escuela cobra 25 centavos por cada almuerzo. ¿Cuánto dinero necesitará un estudiante para almorzar toda la semana?
$(0.25 \times 5 = l$ necesitará $1.25 para almorzar toda la semana.)
$l = 1.25$

3. Eduardo compró 6 bolas de tenis por $3.18. ¿Cuánto costó una bola? (3.18 ÷ 6 = m ó 6 × m = 3.18, m = 0.53 Una bola costó $.53.)
4. Una vaca requiere tres cuerdas de terreno de pasto. ¿Cuánto terreno se necesita para 175 vacas? (175 × 3 = l, l = 525 Se necesitan 525 cuerdas de terreno.)
5. La hermana pequeña de María se toma 8 onzas de leche seis veces al día. ¿Cuánta leche se tomará la niña en una semana? (6 × 8 × 7 = m ó 6 × 8 = p, p × 7 = m, m = 336. La niña se toma 336 onzas de leche en una semana.)
6. La clase invitó a los padres a una función de marionetas. Había solamente 45 sillas en el salón y vinieron 72 padres. ¿Cuántos padres tuvieron que quedarse de pie? (72 - 45 = m ó 45 + m = 72 27 padres tuvieron que quedarse de pie.)
7. Un grupo de niños exploradores entrega 364 hojas sueltas, otro grupo tiene 37 menos que entregar. ¿Cuántas hojas sueltas entregan ambos grupos? (364 - 37 = a, a = 327, 327 + 364 = t ó (364 - 37) + 364 = t, t = 691. Los dos grupos entregan 691 hojas sueltas.)

Tareas de Grupo

Examen de multiplicación

El niño (director del examen) se coloca frente a la clase y dice: "Estoy pensando en dos factores cuyo producto es 42". Luego llama a algún miembro de la clase.

El niño al cual se llamó, pregunta: "¿Estás pensando en 6 y 7?"

El director contesta sí o no, según sea el caso. Se anotan en la pizarra todas las combinaciones de números dadas correctamente, para repasar más tarde.

Si el director deja pasar una combinación equivocada, debe sentarse y se escoge un nuevo director.

E400

Repaso

CONJUNTO II

Parte A

1. Utiliza uno de los símbolos $>$, $<$ o $=$ para completar cada uno de los siguientes enunciados de modo que sea cierto:

a) $747 \underline{(<)} 319 \times 3$

b) $83 \times 7 \underline{(<)} 73 \times 8$

c) $576 \div 9 \underline{(=)} 32 \times 2$

d) $914 - 326 \underline{(>)} 22 \times 25$

e) $34 \times 19 \underline{(=)} 799 - 153$

f) $343 \div 7 \underline{(<)} 49 \times 6$

g) $3148 \underline{(<)} 232 \times 14$

h) $(7 \times 8) \times 2 \underline{(=)} (12 \times 9) + 4$

i) $25 \times 25 \underline{(>)} 30 \times 20$

j) $(40 + 4) \times 4 \underline{(=)} 4 \times 44$

2. Determina si cada uno de los siguientes enunciados es cierto o falso:

a) $6 + 3 = 3 + 6$ (C)

b) $12 - 8 \neq 2 + 2$ (F)

c) $36 + 7 < 35 + 8$ (F)

d) $16 + 12 + 9 = 52 - 15$ (C)

e) $3 \times a$ es siempre mayor que 3×2 (F)

f) $(16 \div 2) \times 2 = 16 \div (2 \times 2)$

g) $7 \times 6 < 156 - 112$ (C) (F)

h) $29 - 8 \neq 4 \times 7$ (C)

i) $4 \times 6 > 2 \times 11 \times 1$ (C)

j) $6 \times 5 \times 2 \neq 30 + 30$ (F)

3. Determina qué operación se utiliza y halla r:
Ejemplo: $7 \times r = 42$, división, $r = 6$

a) $23 = 14 + r$ (sustracción n.º 9)

b) $r = 5 \times 9$ (multiplicación n.º 6)

c) $27 + 14 = r$ (adición n.º 41)

d) $16 + r = 34$ (sustracción n.º 8)

e) $r - 23 = 46$ (adición n.º 69)

f) $24 \times r = 120$ (división n.º 5)

g) $56 \div r = 8$ (división n.º 7)

h) $r = 42 - 16$ (sustracción n.º 6)

E401

4. Escribe cada enunciado de división como un enunciado de multiplicación. Halla el número que n representa.
Ejemplo: $64 \div 2 = n$, $2 \times n = 64$, $n = 32$

a) $832 \div 4 = n$ ($4 * m = 832$ $m = 208$)

b) $273 \div 3 = n$ ($3 * m = 273$ $m = 91$)

c) $568 \div 8 = n$ ($8 * m = 568$ $m = 71$)

d) $4207 \div 7 = n$ ($7 * m = 4207$ $m = 601$)

e) $355 \div 5 = n$ ($5 * m = 355$ $m = 71$)

f) $602 \div 7 = n$ ($7 * m = 602$ $m = 86$)

g) $664 \div 8 = n$ ($8 * m = 664$ $m = 83$)

h) $111 \div 3 = n$ ($3 * m = 111$ $m = 37$)

5. Completa los siguientes enunciados para hacerlos ciertos, utilizando palabras de este conjunto de palabras: división, operación, multiplicación, sumandos, sustracción, factor, adición.

a) Operamos con dos factores y obtenemos un (producto).

b) La operación de (adición) neutraliza la sustracción.

c) Operamos con dos (sumandos) y obtenemos una suma.

d) La operación de sustracción neutraliza la (adición).

e) Para hallar un sumando desconocido utilizamos (la sustracción).

f) Utilizamos la división para hallar un (factor) desconocido.

g) La operación de (adición) produce una suma.

h) Una (operación) con números es una forma de pensar acerca de dos números y obtener un número, y sólo uno.

i) Un producto es el resultado de la operación de (multiplicación).

E402

6. Completa los siguientes enunciados para hacerlos ciertos. Halla el producto. El ejercicio a se presenta como un ejemplo.

a) $5 \times 14 = (5 \times 10) + (5 \times 4) = 70$

b) $6 \times 18 = (6 \times \underline{(10)}) + (6 \times 8)$ $(=108)$

c) $9 \times 32 = (9 \times \underline{(30)}) + (\underline{(9)} \times 2)$ $(=288)$

d) $7 \times 25 = (7 \times \underline{(5)}) + (7 \times 20)$ $(=175)$

e) $5 \times 82 = (\underline{(5)} \times 80) + (5 \times \underline{(2)})$ $(=410)$

f) $25 \times 6 = (\underline{(20)} \times 6) + (5 \times \underline{(6)})$ $(=150)$

g) $100 \times 21 = (\underline{(100)} \times 20) + (\underline{(100)} \times 1)$ $(=2,100)$

h) $32 \times 4 = (16 \times 4) + (\underline{(16)} \times 4)$ $(=128)$

i) $1000 \times 13 = (1000 \times \underline{(10)}) + (\underline{(1000)} \times 3)$ $(=13000)$

7. Expresa cada uno de los siguientes enunciados mediante símbolos:

Ejemplo: El número 8 aumentado en y, $8 + y$

a) La suma de y con 6 $(y+6)$

b) El número y sumado a 6 $(6+y)$

c) El número y aumentado en seis $(y+6)$

d) Seis más que el número y $(y+6)$

Halla el número representado por cada uno de los anteriores, si $y = 7$. (13)

8. Escribe cada enunciado de adición como un enunciado de sustracción. Halla qué número representa n.

a) $40 + n = 68$ $(68-40=m)$ $m=28$

b) $36 + n = 39$ $(39-36=m)$ $m=3$

c) $n + 54 = 90$ $(90-54=m)$ $m=36$

d) $102 + n = 256$ $(256-102=m)$ $m=154$

e) $n + 69 = 534$ $(534-69=m)$ $m=465$

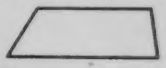
f) $452 + n = 931$ $(931-452=m)$ $m=479$

g) $384 + n = 731$ $(731-384=m)$ $m=347$

h) $465 + n = 534$ $(534-465=m)$ $m=69$

E403

9. Aparea cada palabra en la Columna I con una figura o un significado en la Columna II.

Columna I	Columna II
1) vértice (j)	a) la reunión de una curva cerrada simple y su interior
2) triángulo (h)	b)
3) intersección (a)	c)
4) radio (f)	d) el estudio del espacio y la localización
5) cuadrilátero (i)	e) el conjunto de puntos que es el triángulo y su interior
6) región del plano (e, a)	f)
7) circunferencia (f)	g) el método abreviado para nombrar una recta
8) región triangular (e)	h) el polígono que es la reunión de tres segmentos de recta
9) rayo (b)	i) 
	j) el extremo común de dos rayos que no están en la misma recta

Parte B

Redacta un enunciado matemático (o dos enunciados si es necesario) para cada problema y resuelve. Da la respuesta mediante un enunciado.

1. El señor López pagó 85 centavos por cada bola. ¿Cuánto tiene que pagar por dos docenas de bolas? ($2 \times 12 \times 85 = c$ o $85 \times 24 = c$, $c = 20.40$. El señor López tiene que pagar $20.40 por las bolas.)
2. ¿Cuántas tazas de mantecado pueden comprarse con 90 centavos, si cada taza cuesta 6 centavos? ($90 \div 6 = m$ o' $6 \times m = 90$, $m = 15$. Con 90 centavos, pueden comprarse 15 tazas de mantecado.)

E404

3. Había 28 niñas de sexto grado, 32 niñas de quinto grado y 30 niñas de cuarto grado en la Escuela Santo Tomás. ¿Cuántas niñas había en los tres grados? (28+32+30=m; m=90. Hay 90 niñas en los tres grados.)

4. Para su colección de modelos de aviones, Marcos paga $1.29 por un modelo, $2.25 por otro y $1.46 por otro. ¿Cuál es el costo total de los modelos? (1.29+2.25+1.46=c; c=5.00. El costo total de los modelos es $5.00.)

5. En el problema anterior, Marcos había ahorrado $3.29 y tomó prestado de su papá el resto. ¿Cuánto tomó prestado? (5.00-3.29=m; m=1.71. Tomó prestado $1.71.)

6. Bárbara puede nadar 120 yardas en 5 minutos. ¿Cuánto puede nadar en 20 minutos? ((120÷5)×20=m ó 120÷5=p, p×20=m ó (20÷5)×120=m ó 20÷5=t; t×120=m; m=480. Puede nadar 480 yardas en 20 minutos.)

7. Un letrero en la panadería dice: galletitas - 30 centavos docena; rosquillas - 6 centavos docena; bizcochos de chocolate - 80 centavos cada uno. ¿Cuánto cuestan dos docenas de galletitas y un bizcocho? (2×30)+80=m ó 2×30=c; c=60. 60+8=m; m=140. Dos docenas de galletitas y un bizcocho cuestan $1.80.)

8. En el problema anterior, halla el costo de dos docenas de galletitas, dos docenas de rosquillas y un bizcocho. ((2×30)+(2×60)+80=c; c=260. El costo es $2.60.)

Proyectos individuales:

1. Idea algunas operaciones y sus símbolos. Trata por lo menos 8 problemas con cada una de tus operaciones imaginarias. Luego, pon algunos ejemplos en la pizarra, para ver si tu clase puede averiguar sus significados.

2. La aritmética es solamente un campo de la matemática. Hay por lo menos otros 79 campos. Nombre otros cinco o más campos de la matemática.

E405

Repaso

CONJUNTO III

Parte A

1. En la tabla a continuación, determina qué propiedad se aplica en el enunciado numérico a la izquierda. Escribe la inicial de cada palabra que nombre la propiedad, en vez de escribir las palabras. Por ejemplo escribe P A A para la propiedad asociativa de la adición.

Enunciado numérico	Propiedad
a) $320 \times 7 = (300 \times 7) + (20 \times 7)$	(P. D. M.)
b) $643 \times 29 = 29 \times 643$	(P. C. M.)
c) $287 + 7 = (280 + 7) + (7 + 7)$	(P. D. M.)
d) $381 + (546 + 9) = (381 + 546) + 9$	(P. A. A.)
e) $250 + 5 = (200 + 5) + (50 + 5)$	(P. D. D.)
f) $37 + 504 = 37 + 504$	(Ninguna)
g) $46 \times 6 = (40 \times 6) + (6 \times 6)$	(P. D. M.)
h) $(23 \times 7) \times 18 = 23 \times (7 \times 18)$	(P. A. M.)

2. Llena el espacio en blanco con uno de los símbolos $=$ o $\neq$ que haga cierto cada uno de los siguientes enunciados:
Ejemplo: $324 + 415 \underline{\neq} 748$

a) $46 + 18 \underline{(=)} 64$
b) $303 + 235 \underline{(=)} 538$
c) $456 - 121 \underline{(\neq)} 337$
d) $87 + 344 \underline{(=)} 431$
e) $538 - 382 \underline{(=)} 156$
f) $534 - 273 \underline{(\neq)} 271$
g) $56 + 19 + 53 \underline{(\neq)} 148$
h) $941 - 327 \underline{(\neq)} 624$
i) $897 + 638 \underline{(=)} 1535$
j) $1962 - 1549 \underline{(\neq)} 313$

E406

3. Coloca paréntesis en cada uno de los siguientes enunciados para hacerlo cierto:
Ejemplo: $4 \times 2 - 1 = 4 \times (2 - 1) = 4$

a) $23 + 2 \times 5 = 125$ [(23+2) ×5 =125]

b) $14 + 2 \times 3 = 21$ [(14÷2) ×3 = 21]

c) $30 - 7 + 3 \neq 20$ [(30-7) +3 ≠ 20]

d) $6 \times 2 - 5 = 7$ [(6×2) -5 = 7]

e) $5 + 3 \times 5 \neq 20$ [(5+3) ×5 ≠ 20]

f) $6 + 2 \times 3 \neq 12$ [(6+2) ×3 ≠ 12]

g) $16 + 2 \times 4 \neq 2$ [(16÷2) ×4 ≠ 2]

h) $135 + 5 + 3 = 30$ [(135 ÷5) +3 = 30]

i) $232 \times 6 - 5 = 232$ [232 ×(6-5) = 232]

j) $123 \times 3 - 3 = 0$ [123 × (3-3) = 0]

4. Escribe cada uno de los siguientes enunciados, utilizando numerales y los símbolos para "menor que" y "mayor que":

a) Tres es menor que cinco (3<5)

b) Cincuenta y ocho es mayor que treinta (58 >30)

c) Dieciocho es menor que diecinueve (18 < 19)

d) Cuatrocientos cinco es mayor que cinco (405 > 5)

e) Tres decenas son más que 20 (30 > 20)

f) Mil doce es menor que dos mil (1012 < 2000)

g) Setenta es mayor que sesenta y dos (70 > 62)

h) Novecientos diez es menor que diez centenas (910 < 1000)

i) Trescientos mil es mayor que tres mil (300,000 > 3,000)

j) Cuaranta y seis es mayor que veintiséis (46 > 26)

5. En los siguientes ejercicios, utiliza lo que sabes acerca de multiplicar por 10 y por 100 para obtener las respuestas:

   Ejemplo: $4 \times 364 = 1{,}456$, de modo que $40 \times 364 =$ 14,560

   a) $80 \times 117 = 9{,}360$, de modo que $800 \times 117 =$ (93,600)

   b) $5 \times 766 = 3{,}830$, de modo que $50 \times 766 =$ (38,300)

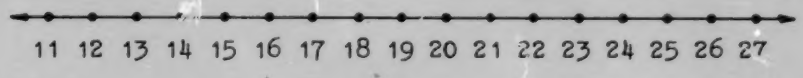
   c) $9 \times 36 = 324$, de modo que $900 \times 36 =$ (32,400)

   d) $30 \times 592 = 17{,}760$, de modo que $300 \times 592 =$ (177,600)

   e) $8 \times 125 = 1{,}000$, de modo que $800 \times 125 =$ (100,000)

   f) $3 \times 987 = 2{,}961$, de modo que $30 \times 987 =$ (29,610)

   g) $12 \times 91 = 1{,}092$, de modo que $120 \times 91 =$ (10,920)

6. 

   Utilizando la recta numérica anterior, halla cuántos números cardinales hay entre

   a) 13 y 17 (3)

   b) 12 y 13 (0)

   c) 19 y 11 (7)

   d) 19 y 25 (5)

   e) 27 y 23 (3)

   f) 21 y 20 (0)

   g) 15 y 17 (1)

   h) 12 y 26 (13)

7. Copia y completa los enunciados siguientes:

   a) Un rayo tiene (un) extremo(s).

   b) Un triángulo es la reunión de (tres) segmento(s) de recta.

   c) Una recta (no) tiene extremo(s).

   d) El espacio es el conjunto de(todos los) punto(s).

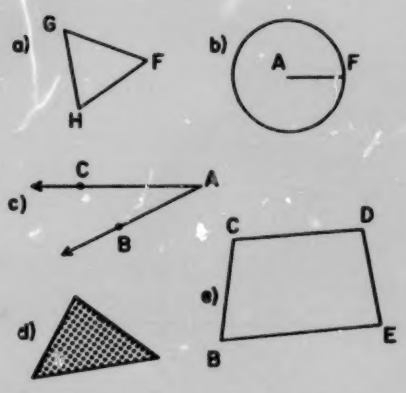
   e) Un segmento de recta tiene (dos) extremo(s).

   f) Un radio es un segmento de recta con (un) extremo(s) en la circunferencia.

   g) Un cuadrilátero es la reunión de (cuatro) segmento(s) de recta.

8. Aparea cada palabra o símbolo de la columna I con una figura en la columna II.

Columna I		Columna II
1) $\overrightarrow{AB}$	(e)	
2) $\angle$ CDE	(a)	
3) triángulo	(c)	
4) $\overline{GH}$	(f)	
5) $\angle$ BAC	(e)	
6) región triangular	(d)	
7) $\overline{AF}$	(b)	
8) circunferencia	(b)	
9) cuadrilátero	(e)	



Parte B

Redacta un enunciado matemático (o dos enunciados si es necesario) para cada problema y resuélvelo. Da la respuesta mediante un enunciado.

1. La familia Ortiz recorrió 387 millas en 9 horas. ¿Cuántas millas recorrieron en cada hora? ($387 \div 9 = m$; $m = 43$. Recorrieron 43 millas cada hora.)
2. Durante la semana de escuelas públicas, 1,162 personas visitaron la Escuela Dos Pinos, 1,219 visitaron la Escuela Las Américas y 1,094 visitaron la Escuela Los Angeles. ¿Cuántas personas visitaron las tres escuelas?
($1162 + 1219 + 1094 = m$; $m = 3475$. 3475 personas visitaron las tres escuelas.)
3. David y Gloria tienen colecciones de sellos. David tiene 364 sellos. Necesita 37 más para tener tantos sellos como Gloria. ¿Cuántos sellos tiene Gloria?
($364 + 37 = m$, $m = 401$. Gloria tiene 401 sellos.)

4. Los treinta y cuatro niños del aula 7 estaban dibujando figuras de pájaros. En el tablón de avisos, se podían colocar cuatro docenas de figuras. ¿Cuántos niños necesitarían hacer dos figuras cada uno? (4×12=d, d=34=m m=14 ó (4×12)-34=m. 14 niños necesitarán hacer dos figuras cada uno.)
5. Un aeroplano de retropropulsión recorre un promedio de 449 millas por hora entre Los Angeles y San Luis. En el viaje, se empleen cuatro horas. ¿Cuántas millas hay entre las dos ciudades? (449×4=d, d=1796. Entre las dos ciudades hay 1,796 millas.)
6. ¿Cuánto más se pagó por dos camisas que cuestan $2.15 cada una, que por una camisa que cuesta $3.29? (2.15×2=t, t=4.30. 4.30-3.29=m, m=1.01 ó (2×2.15)-3.29=m. se pagó $1.01 más.)
7. El precio de las papas es 5 libras por 29 centavos. ¿Cuál es el costo de 20 libras de papas? (20÷5=p, p=4. 4×29=c ó (20÷5)×29=c, c=116. El costo de 20 libras es $1.16.)

Tarea de grupo

Tic, tac, toe

Los fines del juego son velocidad y seguridad en la suma. Este es un juego de ligereza. Cada niño traza segmentos de recta que se intersecan según se indica. La suma la enuncia el maestro. Los niños ponen sumandos de un solo dígito en los cuadrados de manera que cada fila dé la suma.

Ejemplo: La suma es 13.

6	5	2
4	3	6
3	6	4
7	4	2

Tarea individual

Usa solamente polígonos para hacer un dibujo interesante. Mira a ver cuántos polígonos pueden identificar tus compañeros de clase.

Capítulo 8

CARACTERIZACION DE FIGURAS GEOMETRICAS CORRIENTES

PROPOSITO DE LA UNIDAD

Después de un repaso corto de los triángulos y rectángulos, se introducen varias maneras de comparar segmentos rectilíneos y el concepto de congruencia. Ahora, el estudiante tendrá la oportunidad de comprender las ideas de triángulos isósceles y equiláteros y adquirir una noción del concepto de ángulo recto. Los ángulos se comparan con un modelo de ángulo recto para determinar si son "más grandes", "más pequeños" o "del mismo tamaño" que el modelo. La unidad incluye un análisis de los rectángulos y los cuadrados.

El trabajo se preparó para desarrollar la habilidad de los estudiantes para conocer ciertas figuras geométricas corrientes y darse cuenta de sus características. Se estudia la noción de un conjunto de puntos particular llamado superficie cerrada simple. Esto se lleva a cabo de una manera parecida a la que se utilizó para estudiar el concepto de curva cerrada simple en la unidad Conjuntos de puntos.

Las superficies cerradas simples que se estudian son el prisma, el cubo, la pirámide, el cilindro, el cono y la esfera. Partes de estas superficies se describen mediante puntos, rectas y figuras planas estudiadas anteriormente.

BASE MATEMATICA

Segmentos rectilíneos congruentes

Cuando escribimos $4 = 2 + 2$, queremos decir que 4 y $2 + 2$ son dos nombres del mismo número. Cuando escribimos $\overline{AB} = \overline{CD}$, queremos decir que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos nombres del mismo segmento rectilíneo; es decir, los dos segmentos son el mismo conjunto de puntos. Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tienen la misma longitud, pero no constituyen un mismo conjunto de puntos, no podemos decir que son iguales y utilizamos la palabra congruente para describir la relación.

El estudio acerca de los segmentos rectilíneos congruentes se necesita para describir los triángulos isósceles y equiláteros en este capítulo. Un triángulo con dos lados congruentes, al menos, se llama un triángulo isósceles. Un triángulo que tiene tres lados congruentes se llama equilátero.

Angulo recto

Un ángulo recto es un ángulo cuya medida, en grados, es 90. Como los alumnos no han estudiado este concepto, se les enseñará a conocer un ángulo recto mediante el uso de modelos. Podemos encontrar varios modelos con facilidad: la esquina de una hoja de papel, la esquina de un libro, etc. Los alumnos pueden construir sus propios modelos de ángulos rectos, plegando una hoja de papel dos veces, como se indica en el Texto del estudiante.

Un ángulo que no es recto puede compararse con un ángulo recto. El modelo del ángulo recto puede colocarse sobre cualquier modelo que represente un ángulo, de manera que ocurra algo parecido a uno de los dos casos que se indican en la figura I.

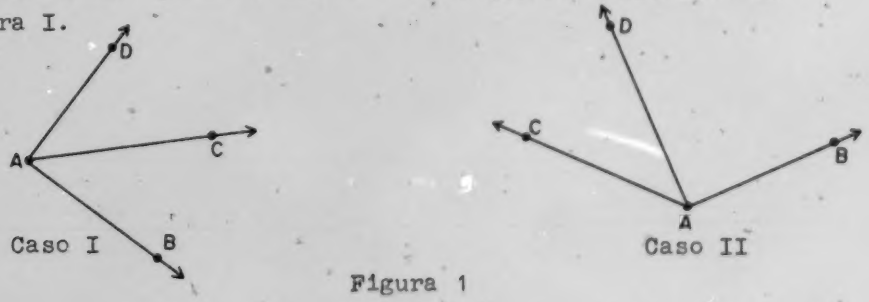


Figura 1

Supongamos que el ángulo que se va a comparar es el $\angle BAC$ y que el $\angle BAD$ es el ángulo recto. En el caso I, $\overrightarrow{AC}$ está entre $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AB}$ y decimos que el $\angle BAC$ es menor que un ángulo recto. En el caso II, $\overrightarrow{AD}$ está entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y decimos que el $\angle BAC$ es mayor que un ángulo recto.

Aunque las palabras rectángulo y rectangular se utilizaron anteriormente, es en esta unidad donde se dan sus significados de una manera precisa. Un cuadrilátero cuyos ángulos representan ángulos rectos, se llama un rectángulo. [Inmediatamente, nos damos cuenta de por qué hablamos de un prisma rectangular (v. la figura 7 en el párrafo que trata acerca de los prismas). Cualquier par de aristas de un prisma rectangular con un extremo común sugiere un ángulo recto y cada una de las caras representa un rectángulo y su interior.] Un rectángulo con todos sus lados congruentes se llama un cuadrado. Algunas de las superficies de las cuales se construirán modelos de papel, tienen caras cuyas aristas forman cuadrados. Para determinar si diversos objetos representan o no rectángulos y cuadrados, utilizamos un modelo de un ángulo recto y los métodos para comparar segmentos.

Superficie cerrada simple

Los puntos A, B y C (que no están en la misma recta) de la figura 2 determinan un plano.

Figura 2

En realidad, tres puntos cualesquiera que no estén en la misma recta determinan un plano, y hay solamente un plano que pasa por esos tres puntos.

Ahora, dibújense segmentos de recta uniendo los puntos A, B y C, como se indica en la figura 3. La reunión de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ es un conjunto de puntos de un plano. Este conjunto de

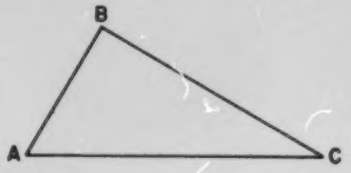


Figura 3

puntos es un triángulo. En el capítulo Conjuntos de puntos, se estudian los triángulos. La reunión del triángulo ABC y su interior se llama una región plana, más especialmente, una región plana triangular.

Ahora, añadamos a la figura el punto D que no está en el plano definido por los puntos A, B y C. Supongamos que se dibujan los segmentos $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$, como se indica en la figura 4, para formar los nuevos triángulos ABD, ADC y BDC.

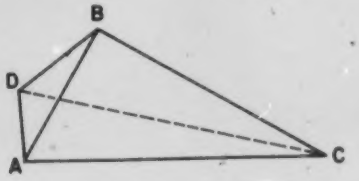


Figura 4

El triángulo ABD y su interior forman una región triangular, el triángulo ADC y su interior también forman una región triangular y lo mismo sucede con el triángulo BDC y su interior. Junto con la región triangular ABC, tenemos ahora cuatro regiones triangulares, tales que dos cualesquiera de ellas no están en el mismo plano. La reunión de estas regiones triangulares es un ejemplo de una superficie cerrada simple. En este caso, la superficie cerrada simple se llama una pirámide. Hay varios tipos diferentes de pirámides. Véase la página 715 donde se da una base matemática relacionada con las pirámides.

Una superficie cerrada simple divide al espacio en tres

conjuntos de puntos: el conjunto de puntos del interior de la superficie cerrada simple, el conjunto de puntos de la superficie cerrada simple y el conjunto de puntos del exterior de la misma. Para pasar de un punto interior a un punto exterior, hay que atravesar la superficie cerrada simple.

En un plano, llamamos a la reunión de una curva cerrada simple y los puntos de su interior una región plana. Análogamente, llamaremos a la reunión de una superficie cerrada simple y los puntos de su interior una región sólida.

Esta unidad trata acerca de la caracterización de varias superficies cerradas simples. También, se introducen algunas otras curvas cerradas simples, como el cuadrado y el rectángulo. Estas se describen como reunión de algunas de las aristas de una superficie cerrada simple.

Prisma

La primera superficie cerrada simple que se estudia es un prisma. Definiremos esta superficie de la manera siguiente: Considérese un polígono. Sea m una recta no situada en el plano del polígono, pero que interseca al polígono. Consideremos todas las rectas que, como p (v. la figura 5), son parale-

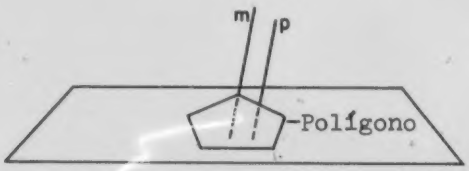


Figura 5

las a la recta m e intersecan al polígono. La reunión de esas rectas es la superficie representada en la figura 6a. La superficie se extiende indefinidamente hacia arriba y hacia abajo. Ahora, supongamos que dos planos paralelos cortan a la superficie. Los dos "cortes" o "secciones" son polígonos. La porción entre los dos planos paralelos junto con las porciones en los planos (las podríamos llamar partes superior e inferior, o mejor, las bases) que están en el interior de los "cortes" forman una

superficie cerrada simple que llamamos prisma. Obsérvese que un prisma, de acuerdo con el uso que damos aquí al término, es hueco.

Figura 6a

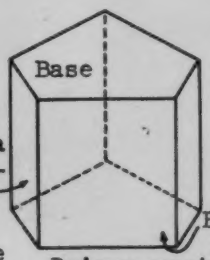


Figura 6b

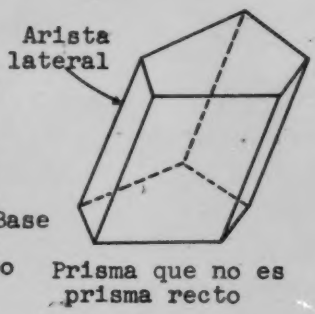


Figura 6c

Cada una de las regiones planas se llama cara del prisma. Las dos caras situadas en los planos paralelos se llaman bases y las demás, caras laterales. (La palabra "lateral" no se utiliza en el Texto del estudiante.) La intersección de dos caras adyacentes de un prisma es un segmento de recta llamado arista. La intersección de dos caras laterales se llama arista lateral. El uso que se da aquí a la palabra arista es el mismo que se le da corrientemente. Cada extremo de una arista se llama vértice.

Si el polígono que determina la base es un triángulo, el prisma se llama un prisma triangular. Si el polígono es un cuadrilátero, el prisma es un prisma cuadrangular y si el polígono es un pentágono, el prisma es un prisma pentagonal. El prisma cuadrangular especial en el que el cuadrilátero es un rectángulo se llama un prisma rectangular. Un prisma rectangular especial en el que todas las aristas son congruentes se llama un cubo. En este capítulo, se espera que los alumnos aprendan a conocer el prisma rectangular (incluyendo el cubo) y el prisma triangular solamente. Véase la figura 7.

Todos los prismas de la figura 7 son ejemplos de un tipo especial de prisma llamado prisma recto, en el cual las caras laterales son perpendiculares a la base. Todos los prismas

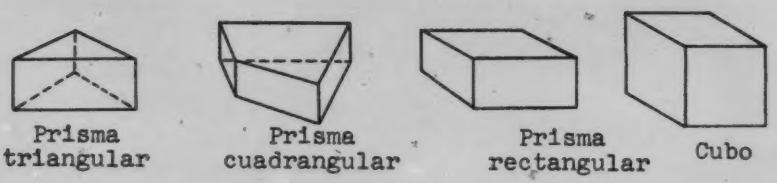


Figura 7

representados en el Texto del estudiante son prismas rectos y no se introduce el término prisma recto. En la figura 6c, se representa un prisma que no es recto.

Pirámide

Al definir una pirámide, procederemos de la misma manera que al definir el prisma. Esta vez, consideremos un punto P que no está en el plano del polígono y todas las rectas que intersecan al polígono y pasan por el punto P. El punto P se llama el vértice. La reunión de estas rectas es una superficie como la que se muestra en la figura 8a.

Figura 8a

Figura 8b

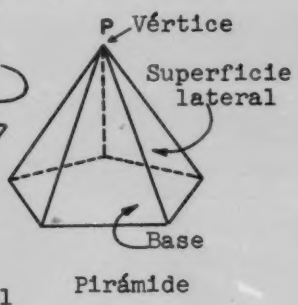


Figura 8c

Esta superficie se compone de dos partes separadas por el vértice. Cada una de las partes se llama hoja (Figura 8a). Supongamos que un plano corta a una hoja, de manera que la intersección sea un polígono (Figura 8b). Este polígono y su interior se llama la base. La reunión de la base, el vértice y la porción de la hoja entre el vértice y la base es una superficie cerrada simple llamada pirámide (Figura 8c). Obsérvese que una

pirámide, según hemos empleado el término, es hueca. Las regiones triangulares se llaman caras laterales. En el Texto del estudiante, a las caras laterales se les llama simplemente caras.

Lo mismo que un prisma, las pirámides se clasifican en triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc., dependiendo de que el polígono de la base sea un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc. (Véase la figura 9.)

Pirámide triangular

Pirámide cuadrada

(También se llama tetraedro)

Figura 9

Cilindro

Un cilindro se define de manera análoga que un prisma. En realidad, en un sentido muy general, un prisma es solamente un caso especial de un cilindro. ¿Es esto una sorpresa? Esta vez, en lugar de empezar con un polígono, empecemos con una curva cerrada simple cualquiera (podría ser un polígono, desde luego).

Procederemos de la misma manera que al definir anteriormente el prisma. Supóngase que una recta m no situada en el plano de la curva cerrada simple interseca a ésta. Considérense todas las rectas que son paralelas a la recta m e intersecan a la curva. La reunión de esas rectas es una superficie. Ahora, supóngase que cortamos la superficie por dos planos paralelos. La intersección de la superficie con cualquiera de esos dos planos paralelos es una curva cerrada simple. Cada una de esas curvas y su interior se llama una base. La reunión de las dos

bases y la porción de la superficie entre ellas es una superficie cerrada simple llama cilindro. La figura 10 muestra varios ejemplos de cilindros.

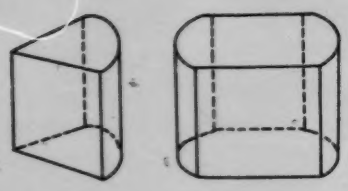
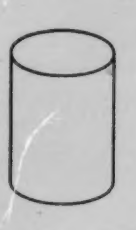


Figura 10a Figura 10b



Cilindro circular recto

Figura 10c

Cilindro circular que no es un cilindro recto

Figura 10d

La figura 10c representa un tipo especial de cilindro en el que la curva cerrada simple es una circunferencia y se llama cilindro circular. Como en el caso del prisma, consideraremos solamente cilindros rectos en los cuales la recta m es perpendicular a la base.

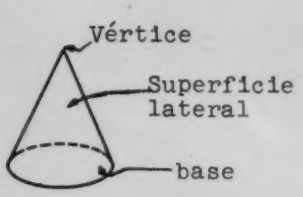
Cono

Si en la definición de una pirámide, sustituimos la palabra polígono por "curva cerrada simple", obtenemos la definición de un cono. Así, en un sentido muy general, una pirámide es un tipo especial de cono.

Si la curva cerrada simple es una circunferencia, obtenemos un cono circular. Un cono tiene una base, una superficie lateral y un vértice. La superficie lateral no se llama cara, pues no es

Cono

Figura 11a



Cono circular recto

Figura 11b

Cono circular que no es un cono recto

Figura 11c

una región plana. Véase la figura 11b.

Esfera

Definimos una circunferencia como un conjunto de puntos de un plano tales que todo punto del conjunto está a la misma distancia de un punto del plano llamado centro. La definición de una esfera es la misma que la definición de una circunferencia con la particularidad de que se omite la frase "de un plano". Por ejemplo, una esfera de radio 4 pulgadas es el conjunto de todos los puntos del espacio que distan 4 pulgadas de un punto fijo. El punto fijo se llama el centro de la esfera. El centro no es un punto de la esfera. Todo punto del espacio que dista menos de 4 pulgadas del centro está en el interior de la esfera. Todo punto del espacio cuya distancia al centro es más de 4 pulgadas está en el exterior de la esfera.

La superficie de un globo es un ejemplo de una esfera. El ecuador y las líneas de longitud representan algunas de las circunferencias que componen la esfera. Obsérvese que una esfera, en el sentido en que empleamos el término, es hueca.

REPASO DEL TRIANGULO Y EL CUADRILATERO

Objetivo: Repasar lo aprendido acerca de las propiedades del triángulo y del cuadrilátero estudiados en la unidad anterior.

Materiales necesarios: Pizarra, tiza, papel, lápiz, regla, tablero de clavijas, clavijas, lápices de colores, cuerda.

Vocabulario: Lados, vértices, triángulo, cuadrilátero

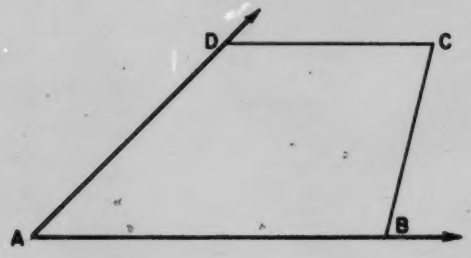
Sugerencias para la enseñanza:

Quizás, el maestro desee utilizar clavijas y un tablero de clavijas en esta sección de repaso. Las clavijas pueden colocarse en ciertos puntos del tablero. Esos puntos

pueden representar los vértices de triángulos o cuadriláteros. Los vértices pueden unirse con una cuerda o con cintas de goma. Los términos: lados y vértices se pueden explicar fácilmente. Después de esta explicación, los alumnos pueden abrir sus libros y trabajar fácilmente con el maestro los ejercicios de la parte titulada Trabajo en grupo. Después, resolverán el Conjunto de problemas 1, independientemente.

El siguiente análisis puede ser útil al considerar los últimos tres párrafos de la página E311. Dibújese en la pizarra una figura análoga a la que se presenta más adelante y dígase:

Examinemos uno de los ángulos, por ejemplo el $\angle DAB$. Los lados $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ son segmentos y no rayos enteros del ángulo. El $\angle DAB$ se indica con rectas de trazo lleno, en la figura siguiente. Esto indica que los ángulos del polígono ABCD no son parte del cuadrilátero.



Quizás, sea necesario indicar de manera parecida, que los ángulos ABC, BCD y CDA no son parte del cuadrilátero.

Para explicar esta misma idea, se hizo un análisis con un triángulo en la unidad Conjuntos de puntos, de modo que, quizás, los alumnos no tengan dificultad con esta idea.

E410

Capítulo 8

CARACTERIZACION DE FIGURAS GEOMETRICAS CORRIENTES

REPASO DEL TRIANGULO Y EL CUADRILATERO

Trabajo en grupo

1) a) ¿Qué nombre se da a un polígono que es la reunión de tres segmentos de recta? (triángulo)

Los tres segmentos de recta se llaman los lados del triángulo.

b) ¿Cómo se llama el extremo común de dos lados cualesquiera de un triángulo? (vértice)

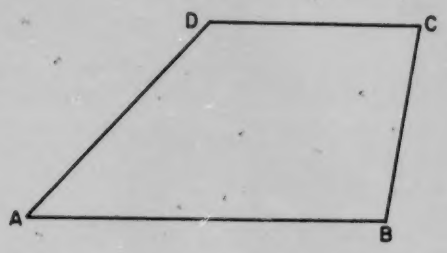
c) ¿Cómo se llaman los extremos de los segmentos de recta de un triángulo? (vértices)

d) ¿Cuántos lados y vértices tiene un triángulo?
(3 lados y 3 vertices)

2) ¿Cómo se llama un polígono que es la reunión de cuatro segmentos de recta? (cuadrilátero)

E411

Llamamos a los cuatro segmentos de recta del cuadrilátero los <u>lados</u> del cuadrilátero. A continuación se presenta un dibujo de un cuadrilátero con los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$.



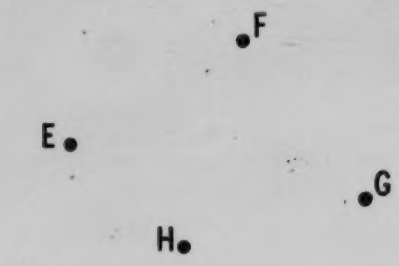
Recordemos que cuadri sugiere cuatro. En la figura anterior, se forman cuatro ángulos. Son $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ y $\angle CDA$. Hay algunos puntos de estos ángulos que no son puntos del cuadrilátero, porque los ángulos están formados por rayos.

El vértice de uno de los ángulos se llama un <u>vértice</u> del cuadrilátero.

Los vértices de estos cuatro ángulos se llaman los <u>vértices</u> del cuadrilátero.

Conjunto de problemas 1

1. a) A continuación, se dan cuatro puntos. Marca estos puntos en una hoja de papel y desígnalos con las letras indicadas.



b) Dibuja $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HE}$.

2. En la hoja de papel en la cual dibujaste la figura para el ejercicio 1, escribe las respuestas a las siguientes preguntas:

a) ¿Forman estos segmentos un cuadrilátero? (sí)

b) Nombra los lados de este cuadrilátero. ($\overline{EF}$ o $\overline{FE}$, $\overline{GH}$ o $\overline{HG}$, $\overline{FG}$ o $\overline{GF}$, $\overline{EH}$ o $\overline{HE}$)

c) Nombra un vértice del cuadrilátero. (Hay varias respuestas posibles. Algunas posibilidades son E, F, G ó H.)

d) Nombra los vértices de este cuadrilátero. (E, F, G, H)

e) Colorea el interior del cuadrilátero. (Se colorea el interior solamente. No debe colorearse el cuadrilátero EFGH. Éste es un momento adecuado para repasar el concepto de región.)

3. Vuelve al ejercicio 1. Marca otra vez los cuatro puntos en una hoja de papel y desígnalos con las letras indicadas.

a) Dibuja $\overline{EG}$, $\overline{FH}$, $\overline{EH}$ y $\overline{FG}$.

b) ¿Forman estos segmentos un cuadrilátero? (no) ¿Por qué? (no forman ni siquiera un polígono.)

4. a) A continuación, se dan cuatro puntos. Marca estos puntos en una hoja de papel y desígnalos con las letras indicadas.

b) Dibuja $\overline{IJ}$, $\overline{JL}$, $\overline{LK}$ y $\overline{KI}$.

5. En la hoja de papel en la cual dibujaste la figura para el ejercicio 4, escribe las respuestas a las siguientes preguntas:

a) ¿Es la figura una reunión de cuatro segmentos de recta? (sí)

b) ¿Están $\overline{IK}$ y $\overline{KL}$ en la misma recta? (sí; al menos, se supone que lo son.)

c) ¿Es la figura un cuadrilátero? (no) ¿Por qué o por qué no? (Porque es también la reunión de tres segmentos de recta $\overline{IJ}$, $\overline{JL}$ y $\overline{LI}$.)

d) ¿Es la figura un polígono? (sí)

e) ¿Cuál es un nombre de la figura? (Triángulo)

6. En tu hoja de papel, marca tres puntos (no todos en la misma recta). Desígnalos P, Q y R. Dibuja $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ y $\overline{RP}$.

a) ¿Es la figura un polígono? (sí)

b) ¿Es la figura la reunión de tres segmentos de recta? (sí)

c) ¿Cuál es un nombre de la figura? (Triángulo)

d) ¿Qué es un triángulo? (un polígono que es la reunión de tres segmentos de recta.)

COMPARACION DE SEGMENTOS DE RECTA

Objetivo: Estudiar métodos para comparar segmentos de rectas y la noción de congruencia.

Materiales: Cuerda, compás, regla, tablero de clavijas, clavijas, papel, lápiz, pizarra, tiza

Vocabulario: Congruente

Sugerencias para la enseñanza:

Repásense las instrucciones para el uso del compás, de la manera que se enseñaron en la lección que trata acerca de las circunferencias en el Capítulo 5.

El mejor instrumento para comparar segmentos de recta es el compás, siempre que pueda utilizarse. En otros casos, quizás, un trozo de cuerda sea el único instrumento de comparación adecuado. Un tercer método es el que utiliza calcos.

Los tres métodos comprenden el uso de modelos. En el Texto del estudiante, se describe detalladamente el uso de modelos en la comparación de segmentos de recta. Evidentemente, un calco y un trozo de cuerda son modelos. Cuando empleamos un compás, no se hace evidente el uso de un modelo, pues solamente se indican los extremos.

Si dos segmentos de recta pueden superponerse punto a punto, de modo que sus extremos coincidan, decimos que dos segmentos son congruentes, o que un segmento es congruente con el otro.

Para empezar el estudio, pídase a los alumnos que comparen a simple vista dos segmentos representados por dos objetos del salón. Deben comprobar sus respuestas, efectuando la comparación con un trozo de cuerda. Pregúntese a los alumnos si la comparación que hicieron a simple vista es tan exacta como la que hicieron utilizando el trozo de cuerda. Ahora, pónganse dos trozos de tiza uno al lado del otro y pídase a los alumnos que indiquen una manera de compararlos con exactitud. Quizás, alguno indique que puede emplear una cuerda o colocar un trozo de tiza sobre el otro para hacer la comparación. Es posible que algún estudiante sugiera el uso de un compás para comparar los dibujos de

dos segmentos que representen los dos trozos de tiza. En este momento, permítasele que experimente y demuestre sus ideas a los demás. El maestro deberá guiarlo por medio de sugerencias, instrucciones o explicaciones para que logre su propósito.

El Texto del estudiante contiene suficientes detalles que podrán servir.

E414

COMPARACION DE SEGMENTOS DE RECTA

Trabajo en grupo

1) Enrique dice que piensa que el segmento de recta representado por el borde de su escritorio no es más largo que el segmento de recta representado por el borde inferior de la puerta. Braulio piensa distinto, y sólo disponen de un trozo largo de cuerda. ¿Cómo pueden decidir qué segmento es el más largo?

2) Braulio dice, "Puedo tomar este trozo largo de cuerda y fijarlo en una esquina de tu escritorio. Luego, podemos extender la cuerda a lo largo del borde hasta la otra esquina. Sostengamos esta cuerda de manera que represente el borde del escritorio".

"Enrique, tú sostienes tu extremo de la cuerda en una esquina del borde inferior de la puerta. Yo pongo la cuerda a lo largo del borde que da a la otra esquina. Supongamos que la cuerda no llega a la otra esquina. Entonces, el segmento representado por el borde inferior de la puerta es más largo que aquel que está representado por el borde de tu escritorio. Si la cuerda va más allá de la otra esquina, entonces el borde de la puerta es más corto que el borde del escritorio. Si la cuerda se puede adaptar exactamente con el borde inferior de la puerta de esquina a esquina, los segmentos de recta son congruentes.

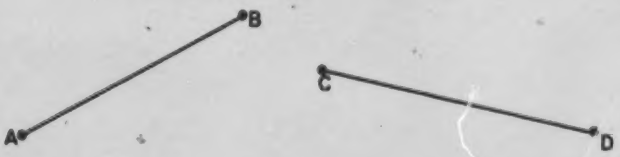
Braulio dice que el segmento de recta representado por el borde que va desde el tope hasta la parte de abajo de la puerta es más largo que el segmento de recta que va de la esquina de su escritorio al escritorio del maestro. ¿Cómo puede decidir cuál es más largo?

Siempre puedes comparar segmentos de recta que están representados por objetos, si tienes un trozo de cuerda que sea suficientemente largo.

Otra forma de comparar segmentos de recta es utilizando un compás.

E415

Si tuvieras solamente un compás y quisieras decidir cuál de los segmentos de recta representados a continuación es el más largo, ¿cómo podrías hacerlo?



3) Sigue las instrucciones y aprenderás cómo se puede usar un compás para comparar los segmentos de recta representados arriba. En una hoja separada de papel, traza la figura anterior.

a) $\overline{CD}$ es parte de $\overrightarrow{CD}$. Extiende $\overrightarrow{CD}$ hasta el borde de la hoja de papel.

b) Pon la punta de metal del compás sobre A y la punta del lápiz sobre B.

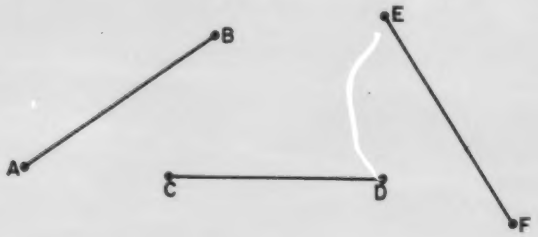
c) Sin cambiar el radio del compás, coloca la punta de metal en C como si fueras a dibujar la circunferencia con centro en C.

d) Dibuja sólo la parte de la circunferencia que se necesita para intersecar a $\overrightarrow{CD}$.

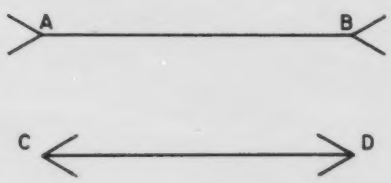
e) Designa la intersección por T. Si T está entre C y D, entonces $\overline{AB}$ es más corto que $\overline{CD}$. Si D está entre C y T, entonces $\overline{AB}$ es más largo que $\overline{CD}$. Si el punto de intersección es D, entonces $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$ (o $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son segmentos congruentes).

4) a) Compara los segmentos, utilizando un trozo de cuerda.
   b) ¿Cuál de los procedimientos de comparación crees que es el mejor en este caso? (El procedimiento en el cual se emplea el compás.)

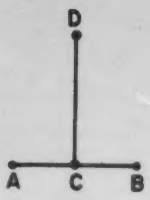
5) Traza los tres segmentos de recta. Compara sus longitudes. Utiliza un compás.
   a) Nombra el segmento de recta más corto. ($\overline{CD}$)
   b) Nombra el próximo más corto. ($\overline{AB}$)
   c) Nombra el más largo. ($\overline{EF}$)



6) Considera $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ a continuación. ¿Cuál parece ser más largo? Utiliza el compás para comparar $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. ¿Cuál es más largo? (Ninguno, los dos segmentos son congruentes.)



7) Compara $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. ¿Cuál es más largo? (Ninguno, los dos segmentos son congruentes.)



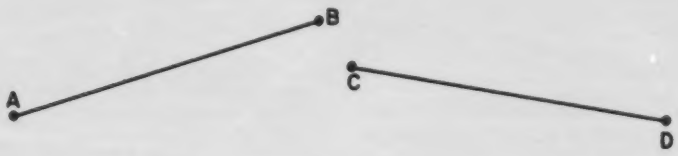
Los ejercicios 6 y 7 nos muestran que algunas veces debemos usar un instrumento para comparar los segmentos. No podemos confiar solamente en nuestra vista.

8) Los segmentos de recta representados a continuación son congruentes.

   a) Utilizando el compás, muestra que son congruentes.

   b) Coloca una hoja de papel fino sobre $\overline{AB}$ y cálcala.

   c) Mueve el calco de manera que el punto marcado A cubra el punto C. ¿Puedes hacer que el punto marcado B cubra el punto D? El calco de $\overline{AB}$ coincide con el dibujo de $\overline{CD}$ exactamente, de extremo a extremo.



Desde luego, no hemos movido $\overline{AB}$, en realidad. Hemos movido una representación del mismo.

9) Si alguien te pidiera que compararas segmentos, ¿qué método usarías? (Se debe hacer un análisis general, comparando los tres métodos. Cada método se emplea en casos diferentes. Cuando puede utilizarse, el método del compás es el más exacto.)

TRIANGULOS ISOSCELES Y EQUILATEROS

Objetivo: Comprender las propiedades de los triángulos isósceles y equiláteros:

a) Un triángulo equilátero tiene tres lados congruentes.

b) Un triángulo isósceles tiene, por lo menos, dos lados congruentes

Vocabulario: Isósceles, equilátero

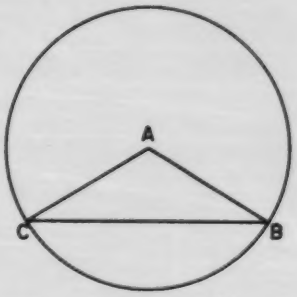
Sugerencias para la enseñanza:

Antes de empezar la lección, el maestro deberá construir un triángulo equilátero y un triángulo isósceles con trozos de alambre o varillas.

A continuación, se presenta el procedimiento para construir en una hoja de papel, triángulos isósceles y equiláteros con un compás y una regla.

1) Construcción de un triángulo isósceles.

a) Dibújese una circunferencia con centro en A.



b) Dibújense dos radios de la circunferencia (que no estén en la misma recta).

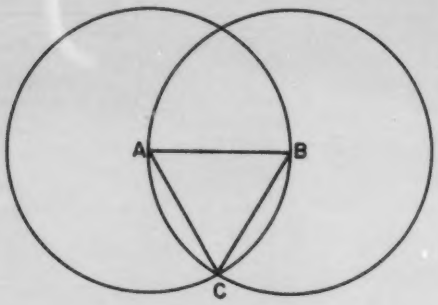
c) Márquense los extremos de los radios que también son puntos de la circunferencia con las letras B y C.

d) Trácese $\overline{BC}$.

e) El $\triangle ACB$ es un triángulo isósceles.

f) $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ son congruentes.

2) Construcción de un triángulo equilátero, dado un segmento de recta $\overline{AB}$ como uno de sus lados.
   a) Dibújese una circunferencia con centro en A y radio $\overline{AB}$.



   b) Sin cambiar la abertura del compás, dibújese una circunferencia cuyo centro sea el punto B.
   c) Márquese con la letra C uno de los puntos donde se intersecan las dos circunferencias.
   d) Dibújense los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.
   e) El $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero.
   f) Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ son congruentes.

A los niños, les gustará hacer una exposición en el tablón de anuncios de varias formas geométricas que se encuentran en la naturaleza. Pueden traer a la clase hojas, caracoles, puntas de flechas e ilustraciones de insectos, animales, copos de nieve, cristales y volcanes. Entonces, deberán clasificar y marcar esas representaciones de formas geométricas.

Antes de asignar el Conjunto de problemas 2, el maestro deberá indicar a los alumnos cómo se construyen un triángulo isósceles y un triángulo equilátero, utilizando solamente un compás y una regla.

E418

TRIANGULOS ISOSCELES Y EQUILATEROS

Trabajo en grupo

Un triángulo que tiene por lo menos dos lados congruentes entre sí se llama un triángulo isósceles.

Un triángulo que tiene tres lados congruentes entre sí, dos a dos, se llama un triángulo equilátero.

1. ¿Cuál de los triángulos a continuación es un triángulo isósceles? (Los dos) ¿Cuál es equilátero? (El de la figura 1)

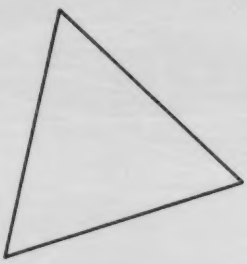


Figura 1

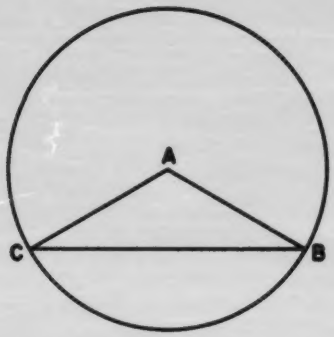
Figura 2

2. ¿Están sugeridos estos triángulos isósceles por los bordes de los modelos en tu salón de clases? (Depende de los modelos.)
3. ¿Hay algunos triángulos equiláteros sugeridos por los bordes de los mismos modelos? (Depende de los modelos.)
4. Nombra algunas cosas en las cuales ves representados triángulos isósceles.
5. Nombra algunas cosas en las cuales ves representados triángulos equiláteros.

E419

Conjunto de problemas 2

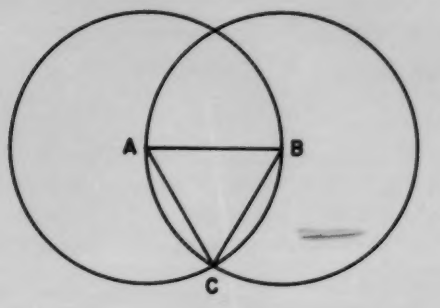
1. a) Dibuja un triángulo isósceles usando solamente un compás, un lápiz y una regla. Esta ilustración te puede ayudar a seguir las instrucciones de tu maestro.



b) ¿Es $\overline{AC}$ congruente con $\overline{AB}$? (Sí) ¿Por qué? (Porque todos los radios de una circunferencia son de la misma longitud.)

E420

2. a) Dibuja un triángulo equilátero, usando solamente un compás, un lápiz y una regla. Esta ilustración puede ayudarte a seguir las instrucciones de tu maestro.



b) ¿Es $\overline{AB}$ congruente con $\overline{BC}$ y con AC? (sí)
¿Por qué? (Porque todos los radios de una circunferencia tienen la misma longitud.)

3. Dibuja un triángulo isósceles que no sea también un triángulo equilátero. Toma uno de los lados congruente con $\overline{DE}$.

D ——————— E

4. Dibuja un triángulo equilátero. Elige cada uno de sus lados de modo que sea congruente con $\overline{DE}$, del ejercicio 3.

ANGULOS RECTOS

Objetivo: Estudiar la noción de ángulo recto, y después, comparar ángulos mediante un modelo construido de un ángulo recto.

Materiales: Papel, lápiz, tiza, pizarra, modelos (de papel) de prismas y pirámides para exponer.

Vocabulario: Angulos rectos

Sugerencias para la enseñanza:

La explicación en el Texto del estudiante contiene suficientes detalles para seguir.

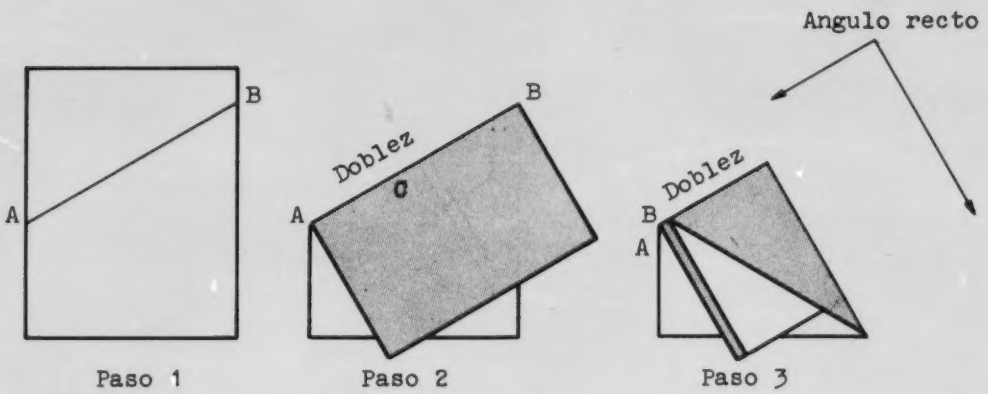
E421

ANGULOS RECTOS

Trabajo en grupo

Hemos aprendido que un ángulo es la reunión de dos rayos que no están en la misma recta. Los dos rayos deben tener un extremo común. Doblando el papel, vamos a representar un ángulo que se llama un <u>ángulo recto</u>.

Dobla una hoja de papel. No es necesario que los bordes coincidan. El doblez representa un segmento de recta. Ahora, dobla el papel otra vez de manera que los bordes del primer doblez coincidan exactamente. La intersección de los <u>dos</u> dobleces es el vértice de un ángulo. Los dobleces representan parte de los rayos de un ángulo. Indica estos rayos. El ángulo así representado se llama un ángulo recto.



¿Sugiere esta página un modelo de un ángulo recto?
(Sí, una esquina)

Nombra algunos otros modelos de ángulos rectos en tu salón de clases. (Hay varias respuestas posibles.)

E422

Usaremos este modelo para dibujar un ángulo recto que tiene un rayo dado como uno de sus rayos. Sea el rayo dado el rayo representado a continuación. Dibuja un rayo como éste en una hoja de papel:

1. a) Designa el extremo del rayo con A.
   b) Coloca el modelo de papel doblado del ángulo recto de manera que el vértice coincida con A y uno de los dobleces coincida con el rayo.
   c) Del vértice, traza una recta a lo largo del otro doblez.
2. Hay dos ángulos rectos posibles que se pueden representar en el papel, si se siguen las instrucciones anteriores. Dibuja ambos.

Usaremos nuestro modelo para comparar ángulos con un ángulo recto. Supongamos que se desea comparar el $\angle BAC$, representado en la figura 1, con un ángulo recto. En otra hoja de papel, copia el $\angle BAC$. Luego dibuja el ángulo recto $\angle BAD$, con $\overrightarrow{AB}$ como uno de sus rayos. Dibújalo de manera que D esté en el mismo lado de $\overrightarrow{AB}$ que C. Nota que $\overrightarrow{AC}$ cae entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$. Diremos, por tanto, que el $\angle BAC$ es más pequeño que el $\angle BAD$. De modo que, el $\angle BAC$ es más pequeño que un ángulo recto.

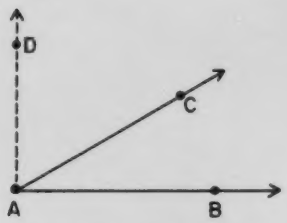


Figura 1

Supongamos que en vez de la representación de la figura anterior, tenemos la figura que sigue. Aquí $\overrightarrow{AD}$ está entre $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$. De manera que decimos que

el $\angle BAC$ es más grande que un ángulo recto.

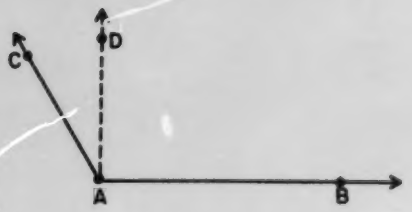
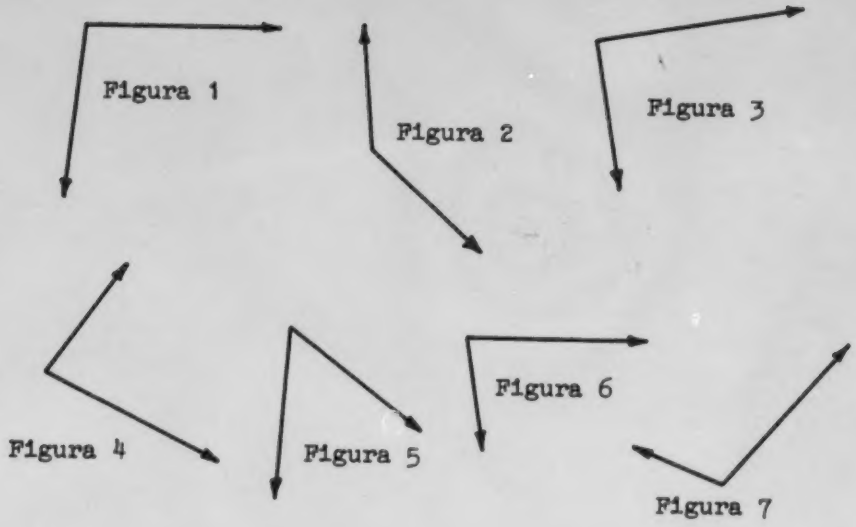


Figura 2

Desde luego, si C está en $\overrightarrow{AD}$, entonces el $\angle BAC$ es un ángulo recto.

E424

Trabajo en grupo



1. Estas figuras representan siete ángulos. Observa cada ángulo con atención. Sin usar un modelo de ángulo recto, nombra aquellos ángulos que crees son ángulos rectos. (Hay varias respuestas posibles. La figura 3 representa un ángulo recto.)
2. Sin usar un modelo de ángulo recto, nombra aquellos ángulos que parecen ser más grandes que un ángulo recto. (Los ángulos de las figuras 1, 2 y 7)
3. Sin usar un modelo de ángulo recto, nombra aquellos ángulos que parecen ser más pequeños que un ángulo recto. (Los ángulos de las figuras 4, 5 y 6)
4. Ahora, comprueba las figuras con un modelo de papel doblado de un ángulo recto, para ver si tus respuestas son correctas.
5. ¿Son tus respuestas al ejercicio 4 las mismas que tus respuestas a los ejercicios del 1 al 3? (Hay varias respuestas posibles.)

6. Ves como se puede comparar un ángulo con un ángulo recto, si el ángulo está representado por un dibujo. Supongamos que un objeto sugiere un ángulo. ¿Cómo compararías ese ángulo con un ángulo recto? Halla algún objeto en tu salón de clases que sugiera un ángulo y compáralo con tu modelo de ángulo recto.

7. ¿Son los ángulos representados por los bordes de tu escritorio ángulos rectos? (Probablemente sí)

8. a) ¿Sugieren alguna vez ángulos rectos las manecillas de un reloj? (Sí)

   b) Nombra una hora en la que las manecillas formen un ángulo menor que un ángulo recto. (Hay varias respuestas posibles como, por ejemplo, las doce y diez.)

   c) Nombra una hora en la que formen un ángulo mayor que un ángulo recto. (Hay varias respuestas posibles como, por ejemplo, las doce y veinte.)

9. Susana desea saber si el ángulo que parecen formar las manecillas de un reloj cuando la hora es 12:10 es más grande o más pequeño que un ángulo recto. Tiene un dibujo de un ángulo recto en papel fino. ¿Cómo podría utilizar ese dibujo para decidir si el ángulo es más grande o más pequeño que un ángulo recto?

10. Nombra algunos otros objetos que sugieren ángulos rectos. (Las intersecciones de algunas calles, las esquinas de una tarjeta; podría abrirse una tijera de manera que represente un ángulo recto; podría abrirse una puerta de manera que la abertura sugiera un ángulo recto.)

RECTANGULOS Y CUADRADOS

Objetivo: Comprender las propiedades de los rectángulos y cuadrados. Un cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos se llama un rectángulo; un rectángulo que tiene todos sus lados congruentes es un cuadrado.

Materiales: Papel, lápiz, tiza, pizarra, compás, cuerda, regla, modelos (de papel) de pirámides y prismas para exponer.

Vocabulario: Rectángulo, cuadrado

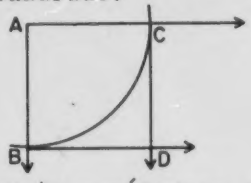
Sugerencias para la enseñanza:

La explicación en el Texto del estudiante contiene detalles suficientes para seguir.

Respuesta al Problema difícil de la página E328.

Dibújese un cuadrado, utilizando solamente un modelo de ángulo recto construido con una hoja de papel plegada, un compás y un lápiz.

Con un modelo de ángulo recto, podemos representar un cuadrado.



a) Elíjase un punto y márquese con la letra A.
b) Con el modelo de ángulo recto hecho con papel plegado, dibújese un ángulo recto con vértice A.
c) Dibújese una circunferencia con centro en el punto A y un radio de longitud conveniente.
d) Márquense con B y C los dos puntos de intersección de la circunferencia y los rayos o lados del ángulo recto.
e) Dibújese un ángulo recto con vértice en B y que tenga $\overrightarrow{BA}$ como lado según se indica en la figura.
f) Dibújese un ángulo recto con vértice en C; que tenga $\overrightarrow{CA}$ como lado, según se indica en la figura.
g) Los ángulos rectos con vértices C y B tienen lados que se intersecan en el punto A y en otro punto. Márquese este punto con D.
h) Compárese el ángulo $\angle BDC$ con el modelo del ángulo recto. Dicho ángulo es un ángulo recto.

El rectángulo con vértices A, B, C, D es un cuadrado. Con un compás, se puede comprobar que los lados son congruentes.

E426

RECTANGULOS Y CUADRADOS

Trabajo en grupo

Si cada uno de los cuatro ángulos de un cuadrilátero es un ángulo recto, decimos que el cuadrilátero es un <u>rectángulo</u>.

1. ¿Puedes hallar bordes de tu libro que representen un rectángulo? (Sí) Compruébalo, mediante el modelo de ángulo recto.

2. ¿Representan un rectángulo los bordes de esta hoja de papel? (Sí) Compruébalo, mediante el modelo de ángulo recto.

3. ¿Puedes encontrar algunos modelos en tu salón de clases que representen un rectángulo? (Sí) Compruébalo, mediante el modelo de ángulo recto.

4. Nombra algunos objetos en tu casa que sugieren rectángulos. (Tableros de escritorios, superficie de una puerta, algunas mesas, algunas ventanas, una caja de arena, parte de una acera, la cubierta de un libro.)

5. ¿Cómo podrías dibujar un rectángulo usando tu modelo de ángulo recto? (Hay varias respuestas posibles.)

Conjunto de problemas 3

1. a) ¿Es el cuadrilátero que se representa a continuación con vértices A, B, C y D un rectángulo? (sí)
   Usa tu modelo de ángulo recto.

   b) ¿Es $\overline{AB}$ congruente con $\overline{BC}$? (no)

   c) ¿Es $\overline{AB}$ congruente con $\overline{DC}$? (sí)

   d) ¿Es $\overline{BC}$ congruente con $\overline{AD}$? (sí)

   e) ¿Es $\overline{BC}$ congruente con $\overline{CD}$? (no)

2. ¿Cuál de estos enunciados es cierto?

   a) Un rectángulo tiene dos pares de lados congruentes. (Cierto)

   b) Los cuatro lados de todo rectángulo son congruentes. (Falso)

   c) Un rectángulo tiene cuatro ángulos rectos. (Cierto)

3. Haz una copia de $\overline{AD}$ en el ejercicio 1. Usando $\overline{AD}$ como un lado, mira a ver si puedes dibujar otro rectángulo que se vea diferente del rectángulo ABCD del ejercicio 1.

E428

Trabajo en grupo

Un rectángulo con todos sus lados congruentes entre sí se llama un cuadrado.

1. A continuación, aparece la representación de un cuadrado. Comprueba los ángulos con el modelo de ángulo recto y los lados con el compás.

a) ¿Son todos los lados congruentes entre sí? (sí)
b) ¿Son rectos todos los ángulos? (sí)

2. Nombra algunos objetos en tu salón de clases que sugieren cuadrados. (Las caras de un bloque, las caras de una loseta, etc.)
3. Nombra algunos objetos en tu casa que sugieren cuadrados. (Hay varias respuestas posibles.)
4. ¿Es todo cuadrado un rectángulo? (sí)
5. a) ¿Es cada rectángulo un cuadrado? (no)
   b) ¿Son algunos rectángulos también cuadrados? (sí)

PROBLEMA DIFICIL

Dibuja un cuadrado, usando solamente el modelo de papel doblado de un ángulo recto, un compás y un lápiz. (Para la solución, véase la página 739.)

SUPERFICIES

Objetivo: Ayudar a los alumnos a comprender la caracterización de algunas superficies corrientes

Materiales: Papel, lápiz, compás, tiza, pizarra, modelos geométricos de un prisma rectangular, uno cuadrado y uno triangular, un cilindro circular, un cilindro no circular, una superficie esférica, un cono; una pirámide cuadrada, una rectangular y una triangular, y un cuadrado. Objetos que tengan estas formas geométricas, como cajas de cereales, tubos cilíndricos no circulares para guardar cepillos de dientes, tambores, vasos, embudos, bloques de madera o cajas de material plástico con la forma de un prisma rectangular y modelos de material plástico, de madera o de papel.

Vocabulario: Interior, prisma cuadrado, prisma rectangular, prisma triangular, cilindro, cilindro circular, cono, cara, arista, pirámide rectangular, pirámide cuadrada, superficie esférica.

Sugerencias para la enseñanza:

Podría darse una base para las ideas que se explicarán en esta lección de la siguiente manera: Antes de la lección (esto podría ser con anterioridad a que los alumnos regresen a sus casas el día antes de la lección o al finalizar la lección anterior), empléense alrededor de quince minutos en mostrar modelos geométricos y representaciones de un prisma rectangular y un prisma triangular, un cilindro, un cono, una pirámide cuadrada, una pirámide triangular y una pirámide rectangular. Los alumnos sabían los nombres de algunas de esas formas geométricas.

Oriente el análisis y dé los nombres correctos que aparecerán debajo de las representaciones en el texto. Entonces, pida a los alumnos que traigan al día siguiente objetos que se parezcan a los modelos presentados. Deben sugerirse las formas geométricas indicadas en la sección Materiales. (El maestro debe tener ejemplares de estos modelos.)

A medida que se explique la lección, cada alumno debe disponer de un objeto que tenga la forma geométrica que se estudia, de modo que pueda seguir la explicación e indicar las diversas partes de esos objetos, a medida que se nombran. Los términos que se mencionan aquí se utilizarán en un sentido descriptivo y no de manera precisa.

En toda la sección, debe entenderse que los modelos que se emplean son solamente representaciones de conjuntos de puntos del espacio.

PRISMA

En la sección Base matemática de esta unidad, se presenta un análisis del prisma.

Quizás, lo más difícil de entender para los alumnos sea que un prisma es solamente la superficie de la figura. Es decir, que un prisma es "hueco". Se compone de un número finito de porciones de planos. En la unidad titulada Volumen en el texto para sexto grado, consideraremos los puntos que están "dentro" del prisma.

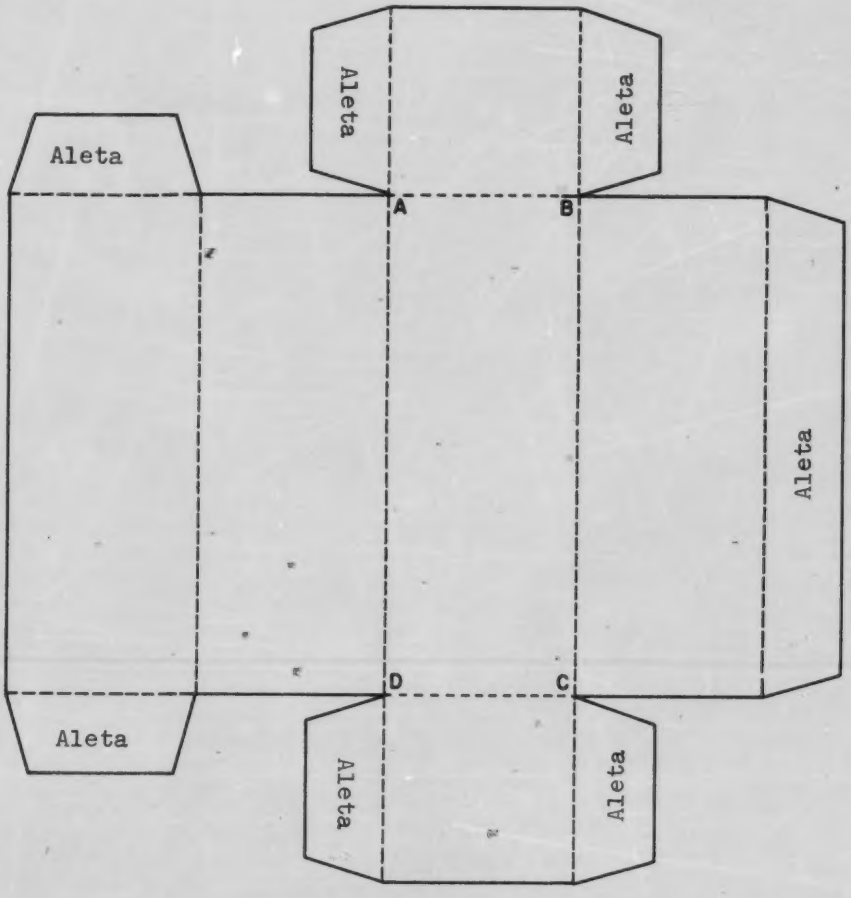
Un prisma puede tener una región poligonal cualquiera como base, pero sus otras caras tienen que ser regiones rectangulares. Desde luego, las dos bases tienen que ser paralelas y congruentes. Las bases también son caras. Si el polígono que determina la base es un rectángulo, el prisma es un prisma rectangular. Si el polígono es un triángulo, el prisma es un prisma triangular; si es un exágono, es un prisma exagonal, etc.

En las páginas siguientes, se dan las instrucciones para construir modelos de papel de prismas cuadrados, rectangulares y triangulares. Cada alumno deberá tener algún conjunto de modelos como referencia. Quizás, los alumnos prefieran traer modelos de sus casas, en vez de construirlos con papel. Los modelos de papel no son duraderos y hay que emplear bastante tiempo en hacerlos. Quizás, el maestro quiera que los alumnos hagan la mayor parte de este trabajo fuera de las horas de clase. Si se hacen duplicados de los patrones de los modelos y se pegan a un material más duro, como cartulina, se pueden construir modelos más duraderos.

En el Texto del estudiante, se da una explicación del prisma lo bastante detallada para poderla seguir. Será muy conveniente que el maestro emplee modelos grandes para explicar esta sección.

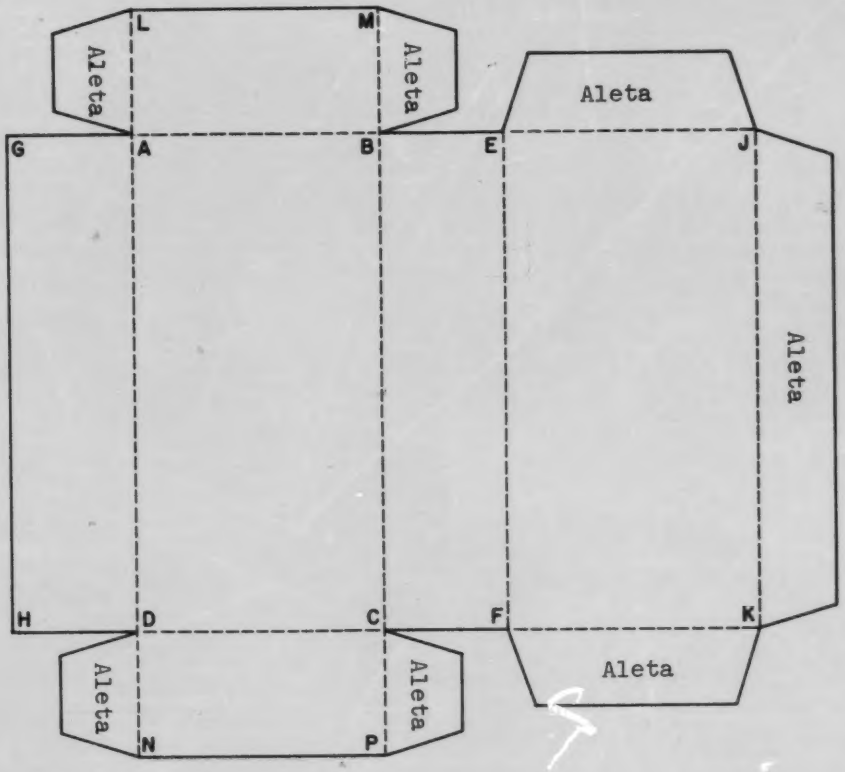
PRISMA - Construcción de un prisma cuadrado:

1. Dibújese un rectángulo ABCD, como se indica en la figura.
2. Dibújense otros tres rectángulos congruentes con el rectángulo ABCD con aletas, como se indica.
3. Dibújense los dos cuadrados a lo largo de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ con aletas, como se indica.
4. Recórtese alrededor de los bordes de la figura y pliéguese a lo largo de los segmentos de trazos.
5. Utilícese cinta engomada o pegamín para mantener la forma del modelo. Las aletas servirán para reforzar el modelo. Si se emplea cinta engomada, quizás, sea conveniente recortarlas un poco.
6. Las bases de este prisma rectangular son cuadrados; por tanto, se llama un prisma cuadrado.
7. Esta figura se redujo fotográficamente. En el modelo original, la longitud de $\overline{AB}$ es $1\frac{1}{2}$" y la de $\overline{BC}$ es 4". Esto hace que el prisma cuadrado tenga las dimensiones $1\frac{1}{2}$" × $1\frac{1}{2}$" × 4".



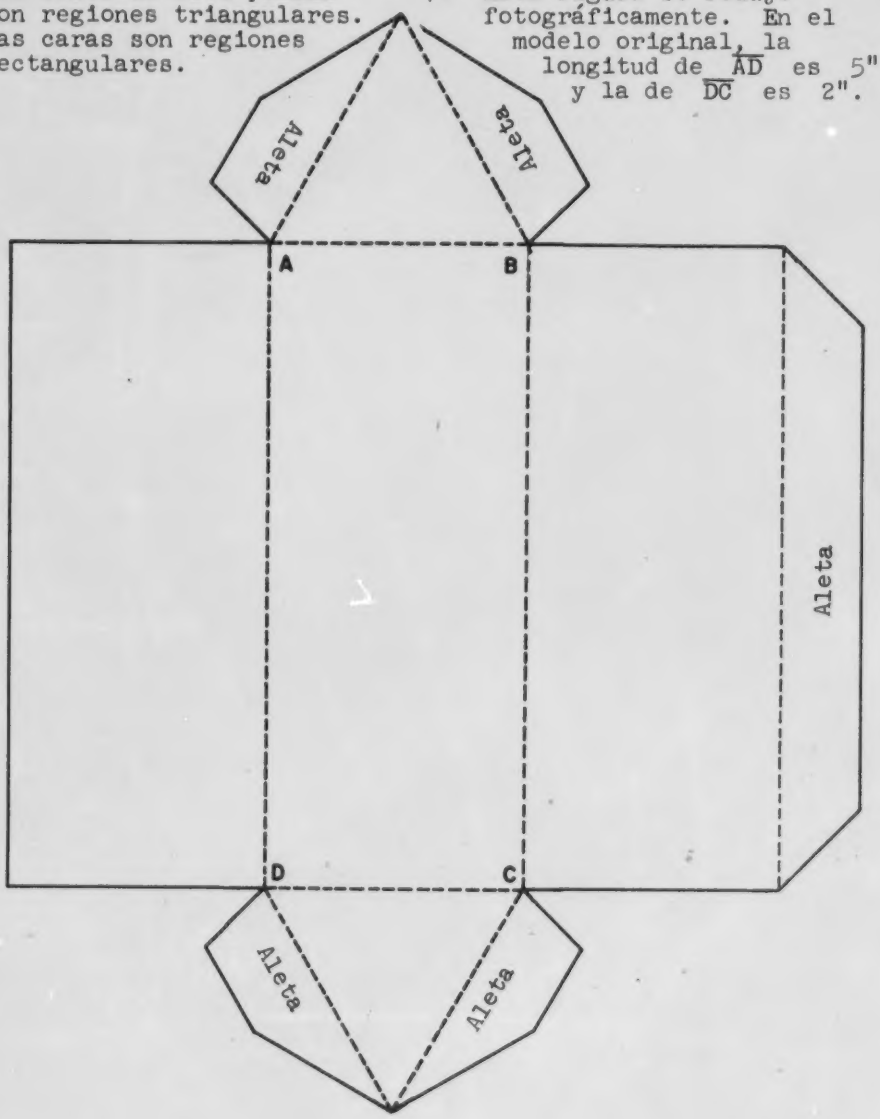
PRISMA - Construcción de un prisma rectangular:

1. Dibújese un rectángulo ABCD, como se indica.
2. Dibújense los rectángulos BEFC, AGHD, EJKF, ABML y DCPN, con aletas, como se indica.
3. Cerciórese de que ABCD $\cong$ EJKF, AGHD $\cong$ DEFC y ABML $\cong$ DCPN.
4. Recórtese la figura y pliéguese a lo largo de los segmentos de trazos.
5. Utilícese cinta engomada o pegamín para mantener la forma del modelo. Las aletas servirán para reforzarlo. Si se utiliza cinta engomada, quizás, se quiera recortar un poco las aletas.
6. Las bases de este prisma rectangular son regiones rectangulares.
7. Esta figura se redujo fotográficamente. En el modelo original, las longitudes de los segmentos $\overline{HD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CF}$, $\overline{FK}$, $\overline{CP}$ y $\overline{CB}$ son 1", 2", 1", 2", 1" y 4", respectivamente.



PRISMA - Construcción de un prisma triangular:

1. Dibújese un rectángulo ABCD, como se indica.
2. Dibújense otros dos rectángulos congruentes con el rectángulo ABCD, con aletas, como se indica.
3. Dibújense dos triángulos equiláteros con aletas, como se indica.
4. Recórtese la figura y pliéguese a lo largo de los segmentos de trazos.
5. Utilícese cinta engomada o pegamín para sujetar las partes del modelo.
6. Las bases de este prisma son regiones triangulares. Las caras son regiones rectangulares.
7. Esta figura se redujo fotográficamente. En el modelo original, la longitud de $\overline{AD}$ es 5" y la de $\overline{DC}$ es 2".



Pirámide

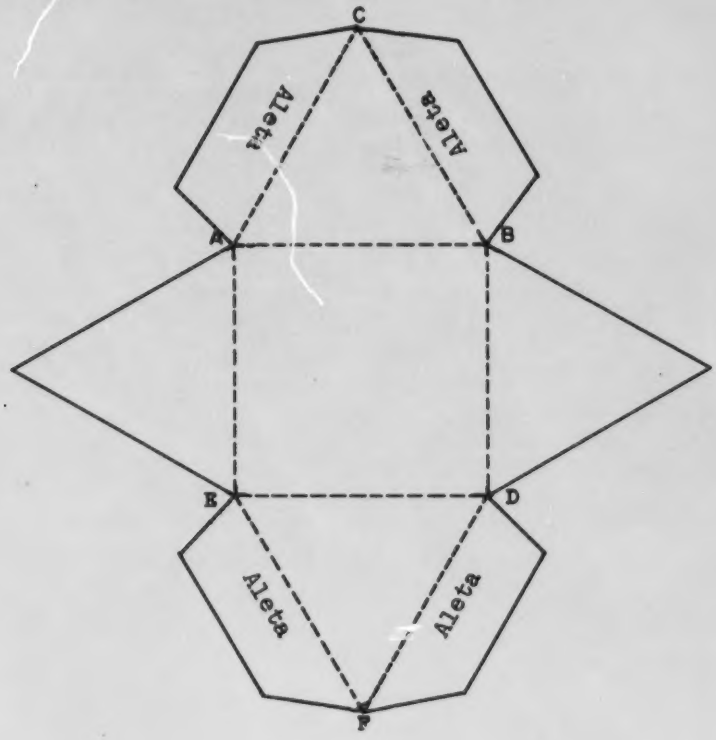
En la sección Base matemática, se da una explicación de la pirámide.

Algunos alumnos tendrán ya una idea general de lo que es una pirámide. Se necesitará desarrollar la noción matemática de pirámide.

La pirámide es "hueca"; consideramos solamente las caras y no los puntos que están en el "interior". La base de una pirámide puede ser una región poligonal cualquiera. Sus otras caras son siempre regiones triangulares. La forma de la base determina el nombre que se le da a una pirámide. Así, tenemos pirámides cuadradas, rectangulares, triangulares, exagonales, etc.

En las páginas que siguen, se dan normas para construir modelos de una pirámide cuadrada y una rectangular. También, se da una regla para la construcción de un tipo especial de pirámide, el tetraedro.

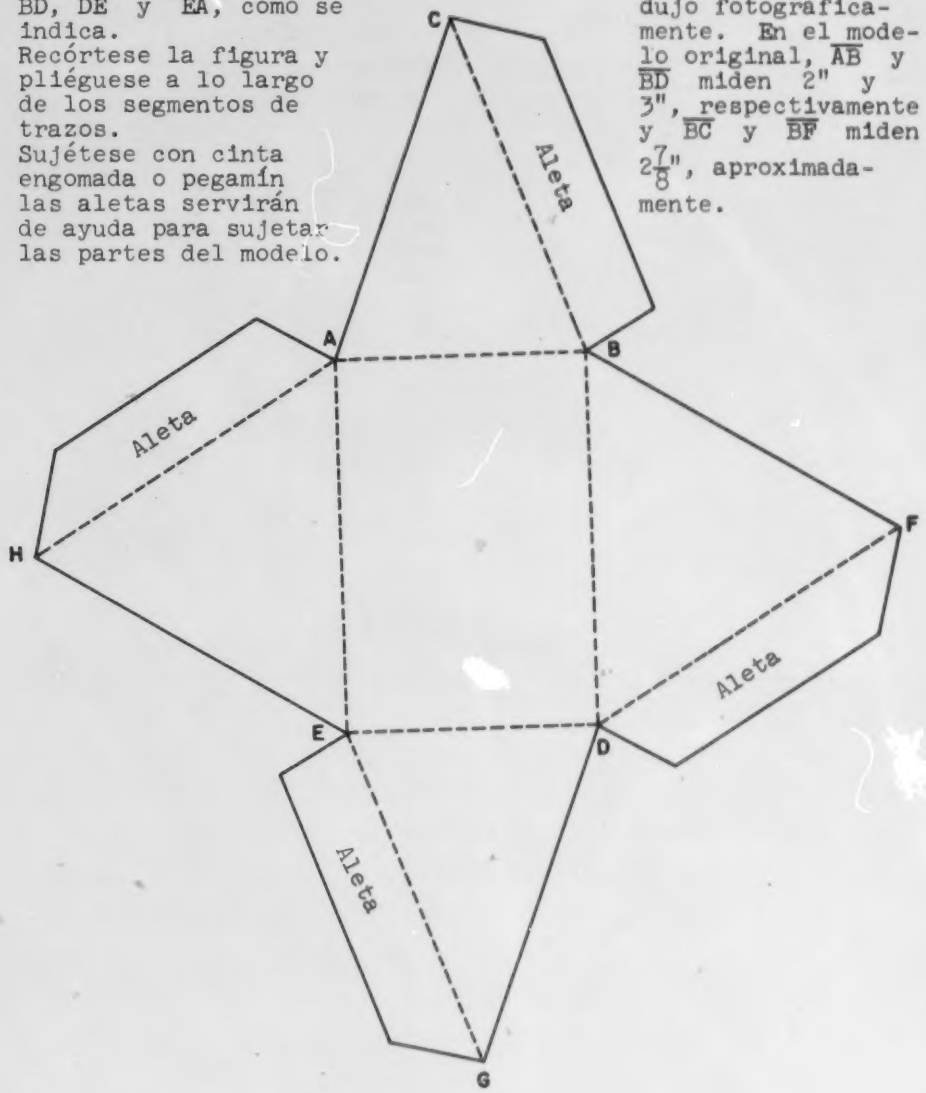
PIRAMIDE - Construcción de una pirámide cuadrada.



1. Dibújese un cuadrado ABDE, como se indica.
2. Dibújense los arcos con centros en A y B y radio $\overline{AB}$. Márquese la intersección con la letra C.
3. Dibújense los segmentos de trazos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ para formar el triángulo equilátero ABC. Dibújense aletas, como se indica.
4. Repítase el paso 3 para obtener el triángulo equilátero EDF formado con segmentos de trazos y dibújense las aletas, como se indica.
5. Dibújese el triángulo equilátero indicado sobre $\overline{BD}$ y $\overline{AE}$.
6. Recortése la figura y pliéguese a lo largo de los segmentos de trazos.
7. Manténganse las partes en su lugar con cinta engomada o pegamín. Las aletas ayudarán a formar el modelo. Si se utiliza cinta engomada, quizás, se quiera recortar un poco las aletas.
8. Esta figura se redujo fotográficamente. En el modelo original, la longitud de $\overline{AB}$ es 2".

PIRAMIDE - Construcción de una pirámide rectangular:

1. Dibújese el rectángulo ABDE con segmentos de trazos, como se indica.
2. Dibújense los arcos con centros en A y B y radio $\overline{AC}$. Márquese con la letra C la intersección indicada.
3. Dibújense el segmento $\overline{AC}$ y el segmento de trazos $\overline{BC}$ para formar el triángulo isósceles ABC. Dibújese la aleta, como se indica.
4. Repítase el procedimiento para formar las regiones triangulares y las aletas sobre $\overline{BD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EA}$, como se indica.
5. Recórtese la figura y pliéguese a lo largo de los segmentos de trazos.
6. Sujétese con cinta engomada o pegamín las aletas servirán de ayuda para sujetar las partes del modelo.
7. Esta figura se redujo fotográficamente. En el modelo original, $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$ miden 2" y 3", respectivamente y $\overline{BC}$ y $\overline{BF}$ miden $2\frac{7}{8}$", aproximadamente.



CILINDRO

En la sección Base matemática, se da una explicación del cilindro.

Quizás, algunos estudiantes tengan ya una idea de lo que es un cilindro. Probablemente, es la de un tipo especial de cilindro, el cilindro circular. Los cilindros pueden tener bases que no sean regiones circulares. Por ejemplo, algunos tanques de combustible para la calefacción, los tanques de gasolina para automóviles y los tubos para cepillos de dientes son modelos de cilindros circulares.

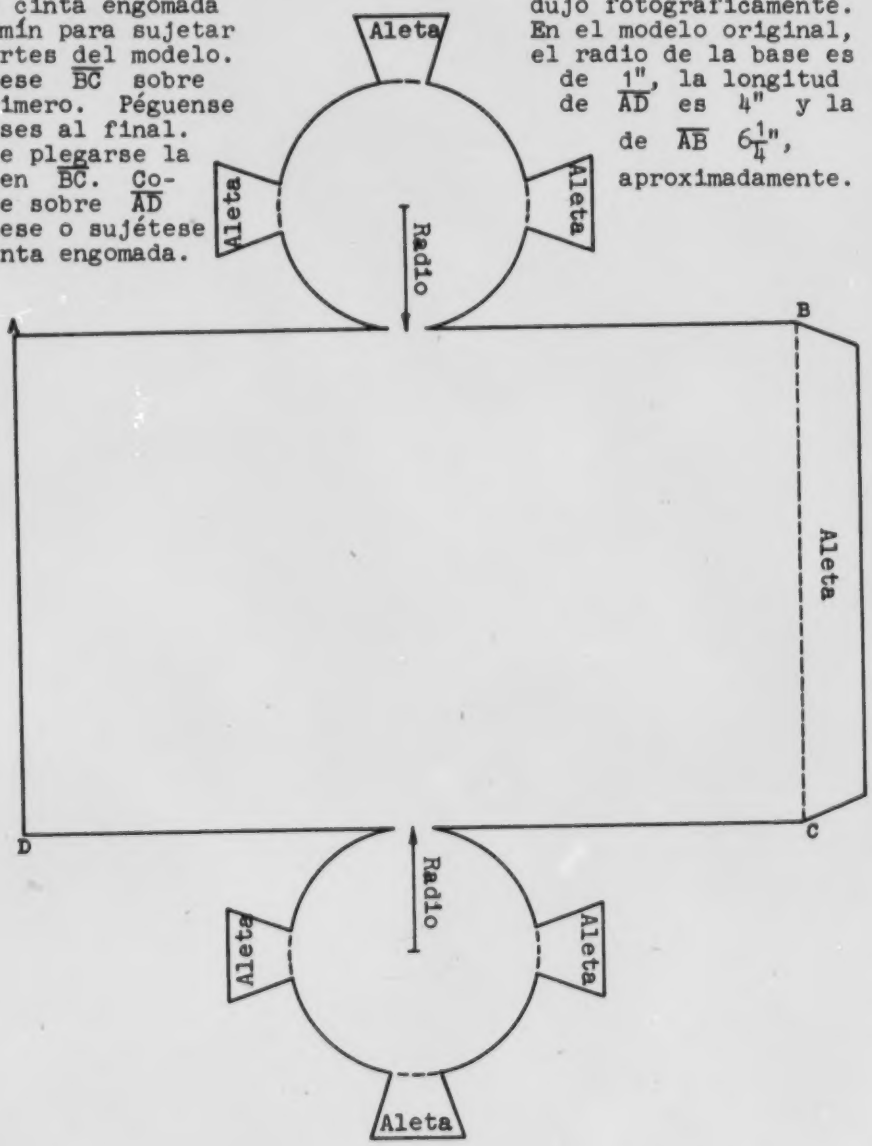
Los alumnos pueden encontrar varios modelos de cilindros circulares, como latas de jugos, latas de alimentos para bebés, latas de frutas y vegetales y cajas de cereales. Sin embargo, debe recordarse que un cilindro tiene "sus dos extremos" cubiertos. Un cilindro tiene dos bases que son congruentes y paralelas y una superficie cilíndrica.

En las páginas siguientes, se dan reglas para la construcción de un cilindro circular y uno no circular.

La explicación dada en el ejercicio 1 de la sección Trabajo en grupo servirá de ayuda a los estudiantes para obtener una idea clara de lo que es un cilindro. Una caja de avena es un modelo apropiado que puede utilizarse. Para obtener la idea de que la superficie curva de un cilindro es una región rectangular cuando se desarrolla y aplica sobre un plano, despéguese y córtese la etiqueta de una lata cilíndrica cualquiera. El maestro debe asegurarse de que el corte se hace perpendicularmente a los bordes superior e inferior de la envoltura, para obtener la región rectangular. Si el corte no es perpendicular, las aristas de la figura resultante determinarán un paralelograma.

CILINDRO - Construcción de un cilindro circular
1. Dibújese un rectángulo ABCD. 2. Dibújense dos circunferencias congruentes con el radio indicado. Para hacer el modelo más fácil de construir, estas circunferencias pueden ser tangentes al rectángulo ABCD. 3. Recórtese la figura. No deben separarse las circunferencias del rectángulo. Esto hará más fácil la construcción del modelo. 4. Pliéguese la figura para formar un cilindro circular. Utilícese cinta engomada o pegamín para sujetar las partes del modelo. Colóquese $\overline{BC}$ sobre $\overline{AD}$ primero. Péguense las bases al final. No debe plegarse la aleta en $\overline{BC}$. Colóquese sobre $\overline{AD}$ y péguese o sujétese con cinta engomada.

5. Esta figura se redujo fotográficamente. En el modelo original, el radio de la base es de 1", la longitud de $\overline{AD}$ es 4" y la de $\overline{AB}$ $6\frac{1}{4}$", aproximadamente.



CILINDRO - Construcción de un cilindro

1. Dibújense el rectángulo ABCD y la aleta, como se indica.
2. Dibújense las bases como se indica.
3. Recórtese la figura. No deben separarse las bases del rectángulo.
4. Pliéguese $\overline{BC}$ sobre $\overline{AD}$ y sujétese la aleta con cinta engomada o pegamín. No debe plegarse esta aleta.
5. Pliéguense las bases a lo largo de los segmentos de trazos y sujétense con cinta engomada o pegamín.
6. Nuestro modelo es un cilindro que no es un cilindro circular.
7. Esta figura se redujo fotográficamente. En el modelo original, el radio de cada semicircunferencia es de media pulgada y las longitudes de $\overline{AD}$, $\overline{EF}$, $\overline{EH}$ y $\overline{AB}$ son 4", 2", 1" y aproximadamente $7\frac{1}{4}$", respectivamente.

CONO

En la sección Base matemática, se da una explicación del cono.

Constrúyase un modelo de un cono, como se indica en la página siguiente. No es necesario utilizar una región semicircular para la superficie curva del cono. Cualquier parte de una circunferencia y su interior puede utilizarse. Mientras más grande sea la parte que se utilice, más corto resultará el cono. Una región semicircular es muy fácil de usar y con ella se consigue un "buen" modelo; por eso, es la que se da aquí.

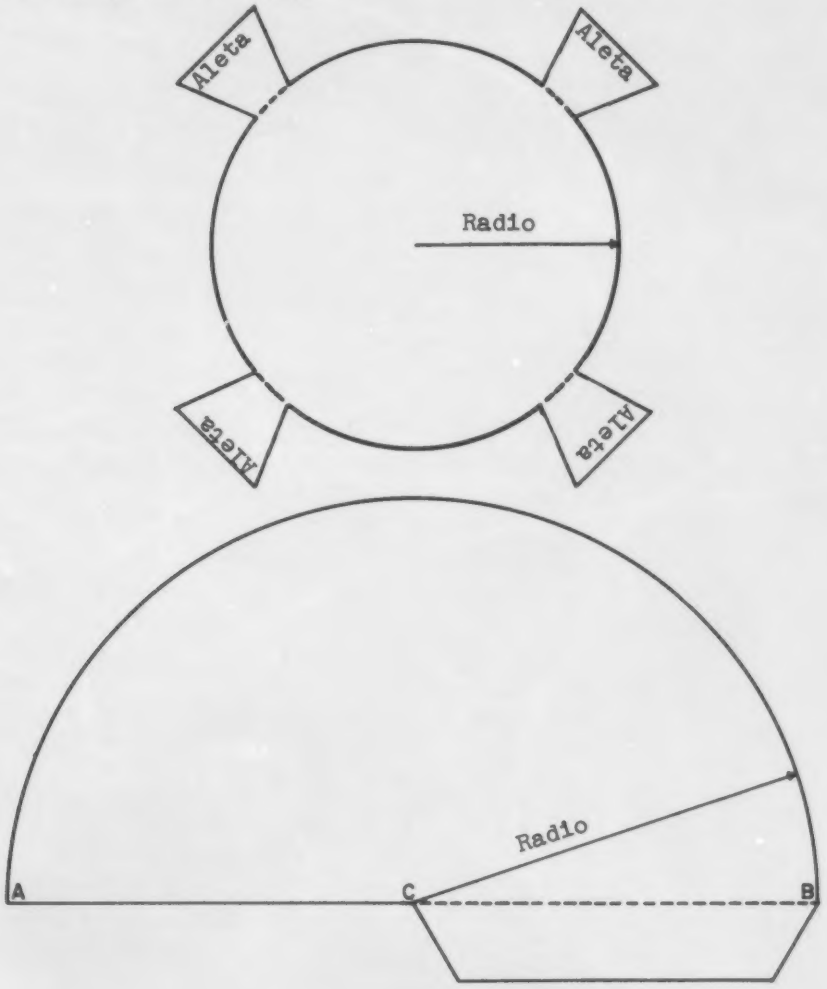
Después que se resuelva el ejercicio 3 de la parte titulada Trabajo en grupo (en la sección que trata acerca del cono), deberá desarmarse el cono. Quítese primero la parte circular, descubriendo así la arista circular. El modelo ahora se parece a un cono de helado sin helado. Ahora, córtese la superficie restante a lo largo de un segmento rectilíneo desde la arista circular al vértice. Aplíquese esta parte sobre la pizarra. Deberá parecerse a un trozo de pastel, lo cual sugiere la reunión de una circunferencia y su interior. Pregúntese a los alumnos a qué se parece la figura. Entonces, reconstrúyase el cono.

Un cono puede considerarse de otra manera. Consideremos una circunferencia y su interior. Elíjase un punto directamente sobre el centro de la circunferencia que no esté en el plano que contiene a la circunferencia. Este punto será el vértice del cono. Considérense todos los segmentos rectilíneos con un extremo en el vértice y otro en la circunferencia. La reunión de todos esos segmentos y la circunferencia y su interior es el cono. Las cintas de una piñata sugieren los segmentos desde el vértice a la arista circular.

En el ejercicio 4, recálquese que la intersección descrita es un triángulo, el maestro deberá sostener el modelo del cono por la punta y el centro de la circunferencia, de manera que el segmento rectilíneo que une la punta y el centro de la circunferencia sea horizontal. Obsérvese la sombra que se produce, cuando un haz de rayos de luz da directamente sobre la figura. Los lados de la sombra representan un triángulo. Si el modelo se sostiene de manera que el segmento rectilíneo citado sea vertical, la sombra representará una circunferencia y su interior. Nómbrense varios objetos que sugieran conos o partes de conos.

CONO - Construcción de un cono

1. Utilícese un compás para dibujar una circunferencia con un radio como el que se indica en el diagrama. Dibújense las aletas, como se indica.
2. Recórtese la figura. La región circular será la base del cono.
3. Utilícese un compás para dibujar una circunferencia con un radio como el que se indica en el diagrama. C es el centro de la circunferencia. $\overline{AB}$ es un diámetro. Dibújese la aleta como se indica.
4. Recórtese la figura.
5. Sújetese $\overline{AC}$ a $\overline{BC}$ con cinta engomada o pegamín, de manera que $\overline{AC}$ esté sobre $\overline{BC}$.
6. Sujétese la base al modelo plegando las aletas y utilizando cinta engomada o pegamín.



SUPERFICIE ESFERICA

En la sección Base matemática, se da una una explicación de la superficie esférica.

A algunos estudiantes, les es difícil entender la idea matemática de superficie esférica. Ciertamente, algunos se confundirán, si empezamos nuestro estudio diciendo: "Una superficie esférica es el conjunto de todos los puntos del espacio que están a la misma distancia de un cierto punto llamado centro". Sin embargo, ésta es la idea que queremos que obtengan de esta breve sección que trata acerca de las superficies esféricas.

Esta lección podría empezarse, indicando que una bola de goma, hueca es un modelo de una superficie esférica. Recálquese que el modelo de la superficie esférica es la cubierta de la bola solamente y no incluye su interior.

El ejercicio 1 de la parte titulada Trabajo en grupo puede llevarse a cabo con una bola de goma y una linterna u otra fuente de luz. En los ejercicios 2 y 3, hay que cortar la bola hueca en dos partes congruentes para indicar que las aristas representan circunferencias. (Algunos maestros han utilizado un globo que puede descomponerse en dos secciones para indicar esto. Los alumnos podrían indicar dónde creen que está el centro de la superficie esférica. Podría utilizarse una varilla o un trozo de alambre para desarrollar la idea de superficie esférica. Esta varilla podría sostenerse, de manera que un extremo esté en el centro de la superficie esférica y el otro extremo se mueva por una de las mitades de la superficie esférica para indicar que este extremo se mueve tocando siempre la "cubierta" de la bola. El diagrama de la derecha indica como puede hacerse esto. El ejercicio 6 también deberá servir de ayuda para explicar esta idea. Quizás, sea conveniente utilizar una naranja como un modelo de una superficie esférica. El interior de la naranja no es parte de la superficie esférica. Pero, cortando la naranja, como se sugirió en el caso de la bola de goma y, luego, sacando la pulpa de la fruta, podrían explicarse los mismos conceptos.

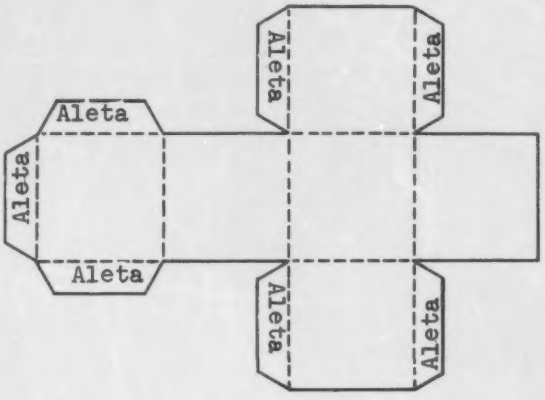
Podría utilizarse una bolita de corcho u otro material esponjonso cualquiera para representar el centro de la superficie esférica. Podrían clavarse en ésta varios palillos al azar. Entonces, los extremos de los palillos podrían representar puntos de la superficie esférica. Los alumnos podrían ver que los extremos de los palillos determinan una superficie esférica.

En los ejercicios 7, 8 y 9, se les pide a los alumnos que expresen con palabras sus ideas acerca de una superficie esférica.

CUBO

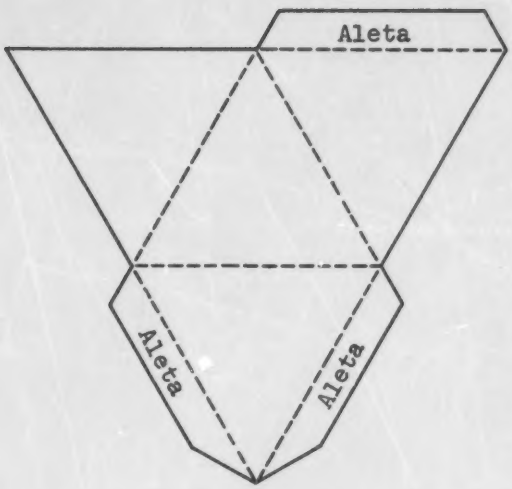
Se dan normas o reglas para la construcción de modelos de un cubo y un tetraedro. Estos modelos pueden usarse para explicar las ideas presentadas en los ejercicios. El maestro deberá tener a mano varios de estos modelos de papel y otros modelos geométricos para utilizarlos en las explicaciones.

Construcción de un cubo



1. Dibújense seis cuadrados (de 4" × 4", al menos) en cartulina o en cartón, como se indica en la figura anterior.
2. Recórtese la figura y pliéguese a lo largo de las rectas de trazos.
3. Sujétense las partes del modelo con cinta engomada o pegamín. Las aletas servirán para reforzar el modelo.
4. El modelo de un cubo tiene seis caras, ocho vértices y doce aristas.

TETRAEDRO



1. Dibújense cuatro triángulos equiláteros (cuyos lados tengan una longitud dada de 4 pulgadas, al menos), como se indica en la figura. Refiérase a la página 729 para la construcción de un triángulo equilátero.
2. Recórtese la figura y pliéguese a lo largo de las rectas de trazos.
3. Sujétense las partes del modelo con cinta engomada o pegamín. Las aletas servirán para que el modelo quede más rígido.
4. El modelo de un tetraedro tiene cuatro caras, cuatro vértices y seis aristas.

E429

SUPERFICIES

Trabajo en grupo

Vamos a considerar algunos objetos. Las superficies de estos objetos representan conjuntos de puntos en el espacio. Estos conjuntos tienen nombres que hallarás al pie de las representaciones de los objetos.

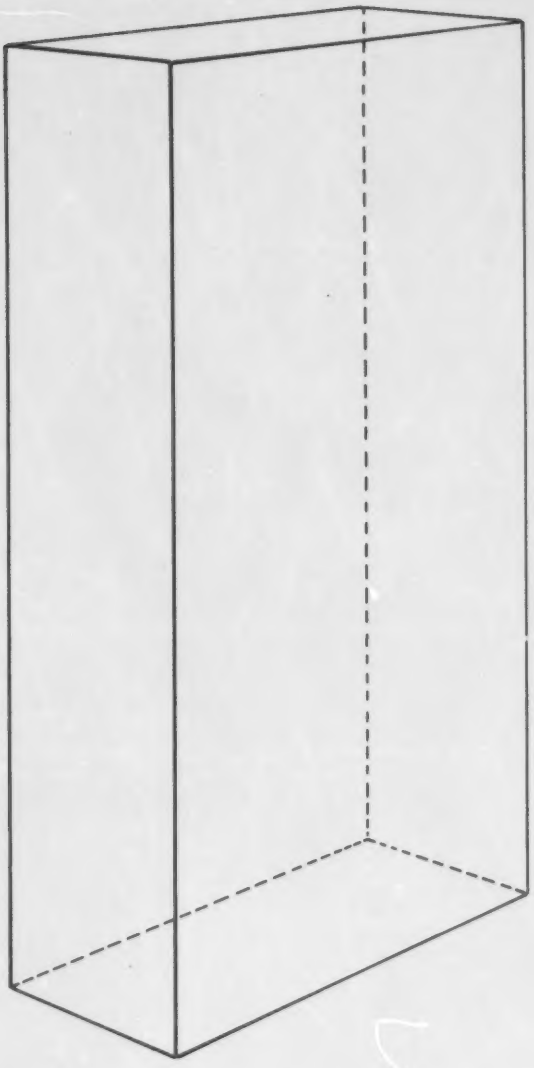
Los objetos se llaman modelos porque representan conjuntos de puntos. Partes de la superficie de algunos de estos objetos nos recuerdan partes de planos, porque son planas.

Una mirada más atenta a estas partes planas muestra que una sugiere una región triangular (un triángulo y su interior). Otra parte plana de un modelo sugiere la reunión de un cuadrilátero y su interior. Otras nos recuerdan regiones circulares (circunferencias y sus interiores).

No todas las partes de las superficies son planas. Por ejemplo, la esfera, el cilindro y el cono tienen partes de superficies que no son planas.

761 287

E430



Prisma rectangular

E431

Prisma rectangular

Trabajo en grupo

Observemos atentamente este modelo de prisma rectangular. Cualquiera de las partes planas de la superficie sugiere un cuadrilátero y su interior. El conjunto de puntos de la parte plana se llama una cara. La reunión de todas las caras se llama un prisma rectangular. Un prisma rectangular consiste en la superficie entera de un modelo, pero no en el interior del modelo.

1. Observa una cara.

   a) Recorre con el dedo el borde de una cara. ¿Los bordes representan los lados de qué figura? (De un cuadrilátero o un rectángulo)

   b) Indica con el dedo los vértices del rectángulo.

   c) Marca con tu lápiz tres puntos en el interior del rectángulo.

2. ¿Cuántas caras tiene el prisma rectangular? (6) Los bordes del modelo representan segmentos de recta. Estos segmentos de recta son la intersección de dos caras diferentes y se llaman aristas del prisma rectangular.

763289

3. a) Recorre una arista con el dedo.

   b) Muestra dos caras cuya intersección es esa arista.

   c) Cuenta el número de aristas del prisma rectangular. ¿Cuántas hay? (12)

Las esquinas del modelo representan puntos. Cada uno de estos puntos se llama un vértice del prisma; es también el vértice de cada uno de los tres cuadriláteros que coinciden en esta esquina. El plural de la palabra "vértice" es "vértices", de manera que podemos hablar de un vértice y varios vértices.

4. a) En tu modelo, marca un vértice del prisma rectangular con un lápiz.

   b) ¿Qué tres cuadriláteros tienen este punto como vértice?

   c) ¿Cuántos vértices tiene un prisma rectangular? (8)

5. Nombra algunos otros objetos que representan un prisma rectangular. (una caja de tizas, una caja de lápices, un libro)

6. Si un bloque de madera fuera hueco, ¿representaría todavía un prisma rectangular? (Sí, en realidad, solamente un bloque hueco representa un prisma rectangular. El prisma es la reunión de regiones cuadrilaterales. No incluye los puntos dentro del bloque.)

E433

Conjunto de problemas 4

1. Completa los siguientes enunciados, en una hoja de papel aparte:

   a) Un prisma rectangular tiene seis caras.

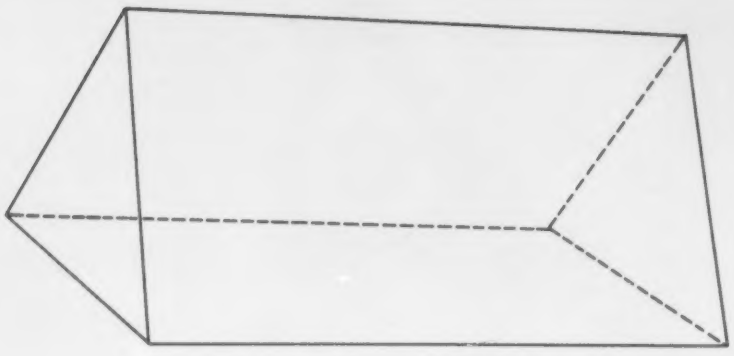
   Cada cara representa una región rectangular.

   b) El prisma rectangular tiene doce aristas y ocho vértices.

2. ¿Es hueco un prisma rectangular? (No)

765271

E434



Prisma triangular

E435

Prisma triangular

Trabajo en grupo

El modelo que estudiaremos próximamente representa un prisma triangular. Como en el prisma rectangular, las partes planas del modelo representarán regiones planas que se llaman caras. El prisma triangular es la reunión de las caras. (Nota que un prisma triangular, según lo hemos definido, es "hueco".)

1. ¿Son todas las caras del prisma triangular la reunión de regiones rectangulares? (no)
2. Indica una cara que no representa una región rectangular. (Una cara triangular)
3. ¿Qué representa esta cara? (Un triángulo y su interior) Llamamos a una cara que representa un triángulo y su interior una cara triangular o una región triangular.
4. ¿Cuántas caras triangulares hay? (Dos)
5. ¿Cuántas caras rectangulares hay? (Tres)

El prisma triangular también tiene segmentos de recta que son las intersecciones de dos caras y se llaman aristas. Los extremos de las aristas se llaman vértices del prisma. Están representados por las esquinas de los modelos.

6. ¿Cuántas aristas tiene un prisma triangular? (Nueve)
7. ¿Cuántos vértices tiene un prisma triangular? (Seis)
8. Nombra algunos objetos que representan un prisma triangular. (Una tienda de campaña, etc.)

E436

Conjunto de problemas 5

1. Observa tu modelo y escribe en una hoja de papel aparte las palabras que completan los siguientes enunciados:

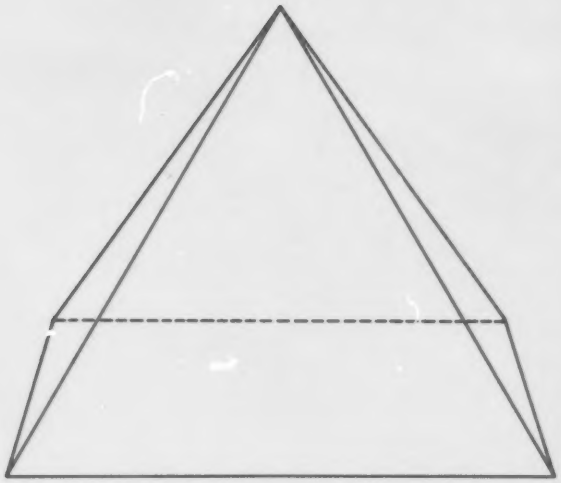
   a) Un prisma triangular tiene 2 caras triangulares.

   b) Un prisma triangular tiene 5 caras.

   c) Un prisma triangular tiene 9 aristas.

   d) Un prisma triangular tiene 6 vértices.

E438



Pirámide

E439

Pirámide

Trabajo en grupo

Observa el modelo de pirámide representado en la página E438. Está constituida solamente por partes planas como las de un prisma. Estas sugieren partes de planos y, como en el caso del prisma, se llamarán caras. La pirámide es la reunión de estas caras. (Observa que una pirámide, según la hemos definido, es "hueca".) Las caras contiguas se intersecan en un segmento de recta que tiene extremos llamados vértices.

1. a) ¿Cuántas caras triangulares tiene esta pirámide? (4)

   b) ¿Hay algunas caras en esta pirámide que no son triangulares? (sí) Recorre esta cara con el dedo.

   c) ¿Cuántas caras hay en esta pirámide? (5)

   d) ¿Cuántos vértices hay en esta pirámide? (5)

   e) Coloca un dedo en un vértice que sea la intersección de tres caras.

   f) Indica un vértice que sea la intersección de cuatro caras.

   g) ¿Cuántas aristas tiene esta pirámide? (8)

   h) Recorre con el dedo cuatro aristas que se intersequen en un vértice.

2. Nombra algunos objetos que sugieren una pirámide.
(algunas tiendas de campaña, las Pirámides egipcias, algunos techos de casas.)

E440

Cilindro

E441

Cilindro

Trabajo en grupo

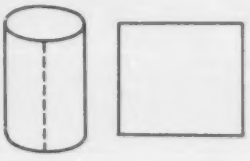
Observemos el modelo del cilindro que has traído a clase.

1. a) ¿Son planas todas las partes de la superficie del modelo? (no)

   b) ¿Qué representan las partes planas? (una circunferencia y su interior, llamada algunas veces disco o región circular.)

   c) ¿Son del mismo tamaño todas las regiones circulares? (sí)

Quita la tapa y el fondo de una caja que sea modelo de un cilindro. Da un corte recto como se muestra en la ilustración. Desarrolla la parte que has cortado de manera que resuelte plana sobre el escritorio.



2. a) ¿Qué figura geométrica se representa? (un rectángulo)

   b) ¿Sugiere esto un procedimiento para construir un modelo de un cilindro?

   c) Pon las partes de la caja juntas otra vez, de manera que sea el modelo de un cilindro.

3. Nombra algunos objetos que representan cilindros o partes de cilindros. (un tambor, un tanque, un envase para helado, latas de alimento, algunos vasos, algunos zafacones, cajas para arena, tuberías.)

4. No todos los cilindros son como las cajas de avena o las latas que compraste. Tus modelos son ejemplos de la clase especial de cilindro llamado cilindro circular. Los cilindros circulares tienen regiones circulares por bases.

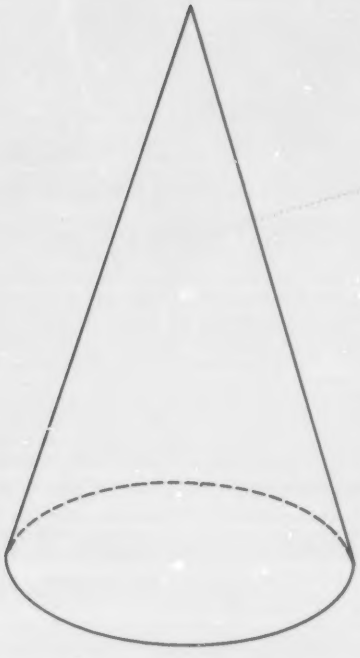
Muchos cilindros no tienen regiones circulares por bases. Observa esta ilustración de un cilindro. Sus bases no son regiones circulares.

Toma una lata que sea un modelo de un cilindro circular. Quítale ambas bases. Aplástalo como se indica a la derecha: Piensa en bases que sean regiones ovaladas con arreglo a las cuales se ha fabricado la lata.

Ahora tenemos un modelo de un cilindro que no es un cilindro circular.

Trata de hallar un modelo de un cilindro que no sea un cilindro circular. Algunas veces, los cepillos de dientes vienen en esta clase de estuche. ¿Será la parte de la horquilla delantera o trasera de una bicicleta un ejemplo de un cilindro?

E444



Cono

776 250

E445

Cono

Trabajo en grupo

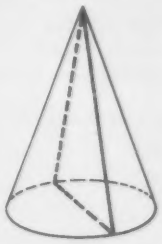
Podemos ver, por las fotografías, que el modelo de un cono es diferente al de un cilindro.

1. Describe algunas de las diferencias entre el modelo del cono y el modelo del cilindro.

2. a) ¿Qué figura geométrica sugiere la parte plana? (una región circular)
   b) Coloca el modelo del cono de manera que la parte plana esté en una hoja de papel y dibuja alrededor del borde. ¿Qué figura se representa? (una circunferencia)

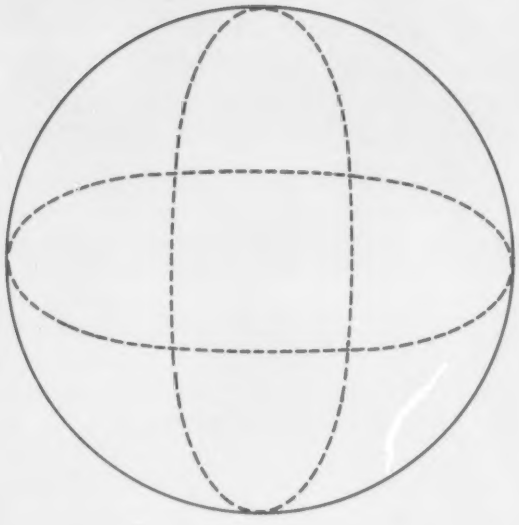
3. ¿Qué representa la punta de un modelo de un cono? (un punto) El punto representado por la punta se llama el vértice del cono.

4. Supongamos que el modelo de un cono se corta por mitad, de manera que el corte pase por el vértice y divida a la región circular en partes de igual tamaño. ¿Qué representará el borde del corte? (un triángulo) El borde del corte se indica por los segmentos de recta gruesos en el dibujo.



5. Nombra otros objetos que sugieren conos o partes de cono. (Conos para helado vacíos, algunas copas de papel, una tienda de indios, la punta afilada de un lápiz.)
6. ¿Es hueco un cono? (Sí, de la manera que lo hemos definido, es hueco.)

E446



Superficie esférica

778 292

E447

Superficie esférica

Trabajo en grupo

La superficie de una bola o de un globo es un modelo de una superficie esférica.

1. Observa la sombra de una bola en la acera, cuando el sol está directamente sobre nuestras cabezas, o mira la sombra formada por una bola con una luz dirigida sobre ella.

   ¿A qué se parece el borde de la sombra? (a una circunferencia)

2. Corta un modelo de una superficie esférica en dos pedazos de igual tamaño.

   ¿Qué figura geométrica representan los bordes de cada mitad de la superficie esférica? (Una circunferencia)

3. Sitúa una de las mitades de la superficie esférica en una superficie plana de manera que el borde del corte esté en la superficie plana. Dibuja alrededor de este borde.

   ¿Qué representa el dibujo? (Una circunferencia)

4. ¿Crees que todos los puntos de la mitad de la superficie esférica están a la misma distancia del centro de la circunferencia que representa el borde? (Sí)

5. ¿Sugiere esto que hay un punto en el interior de la superficie esférica que deberíamos llamar el centro? (Sí)

E448

6. Considera una pelota que cuelga de un punto fijo, mediante una soga. Cuando la soga está bien estirada, la bola está siempre a la misma distancia del punto en que la soga está atada. Según la bola se mueve tomando diferentes posiciones, ¿crees que el punto donde la bola está atada a la soga es un punto de una superficie esférica? (Sí)

7. ¿Cómo describirías una superficie esférica?

8. ¿Sería la descripción de la superficie esférica, "El conjunto de todos los puntos en el espacio que están a la misma distancia de un punto fijo llamado el centro", una buena descripción? (Sí)

9. ¿En qué difiere esta descripción de la de una circunferencia? (La descripción es la misma, salvo que para una circunferencia, todos los puntos deben estar en el mismo plano.)

10. ¿Es hueca una superficie esférica? (Sí)

E449

ARISTAS Y CARAS

Trabajo en grupo

1. ¿Forman cualesquiera aristas de un prisma triangular un rectángulo? (Sí) Compruébalo con tu modelo de ángulo recto.

2. ¿Forman cualesquiera aristas de una pirámide un rectángulo? (Sí, si la pirámide es una pirámide rectangular) Compruébalo con tu modelo de ángulo recto.

3. ¿Cuántas caras del prisma rectangular tienen aristas que forman un rectángulo? (6)

4. ¿Cuántas caras de un prisma triangular tienen aristas que forman un rectángulo? (3)

5. ¿Cuántas caras de la pirámide tienen aristas que forman un rectángulo? (Una)

6. Observa los modelos de un prisma rectangular, un prisma triangular y una pirámide. Copia la siguiente tabla en una hoja de papel y llena los espacios en blanco:

	Número de caras	Número de vértices	Número de aristas	Número de caras más número de vértices menos número de aristas
Prisma rectangular	6	8	12	2
Prisma triangular	5	6	9	2
Pirámide	5	5	8	2

E450

a) Suma el número de caras y el número de vértices del prisma rectangular. Resta el número de aristas de esta suma. ¿Cuál es tu respuesta? (2)

b) Haz lo mismo para el prisma triangular y la pirámide. ¿Cuál es tu respuesta en cada caso? (2)

c) Observa las otras figuras geométricas formadas de porciones planas. ¿Es el número de caras más el número de vértices, menos el número de aristas, el mismo para estas figuras geométricas? (sí)

d) ¿Crees que obtendrás siempre la misma respuesta, si sumas el número de caras y el número de vértices y, luego, restas el número de aristas, de cualquier figura geométrica que es reunión de partes de planos? (sí)

e) Escribe un enunciado matemático para tu respuesta al ejercicio 6d. (Hay varias respuestas posibles. El enunciado debe ser $C + V - A = 2$ donde C, V y A representan el número de caras, vértices y aristas, respectivamente.)

Capítulo 9

MEDICION LINEAL

PROPOSITO DE LA UNIDAD

Esta unidad se propone introducir a los alumnos en el concepto de longitud y la técnica de la medición lineal.

Nuestro estudio de la medición lineal puede dividirse en cuatro etapas principales paralelas al desarrollo histórico:

1. Conocimiento intuitivo de la idea de diferencia en tamaño.

2. Elección de una unidad arbitraria, entendiendo que la unidad debe ser de la misma naturaleza que lo que se va a medir: un segmento rectilíneo para medir un segmento rectilíneo.

3. Elección de unidades normalizadas para facilitar la comunicación.

4. Construcción de una escala apropiada para facilitar la medición.

BASE MATEMÁTICA

Mucho antes de su ingreso a la escuela, el alumno ha tenido experiencia con la noción de medida. Su padre es más alto que él; su hermana es más joven que él; aumentó tres libras desde el último examen médico; la casa nueva es más grande que la antigua. Cuando el alumno llega al estudio de esta unidad, al final del cuarto grado, ya entiende proposiciones como las siguientes: "Mi papá mide 6 pies 2 pulgadas"; "El lechero nos dejó tres litros de leche hoy"; "Empleo 15 minutos en llegar a la escuela". Sabe que hay varios tipos diferentes de mediciones: de tiempo, de peso, de líquidos, lineales; y aplica las unidades apropiadas. En esta unidad, nos proponemos solamente precisar y ampliar el conocimiento de los alumnos de la idea de medición lineal, pero también afianzar su conocimiento intuitivo.

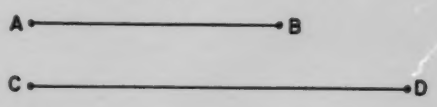
Es interesante observar que al desarrollar la idea de medición para los alumnos, en realidad, seguimos el desarrollo histórico de ese concepto. Contar objetos discretos o separados (como el número de ovejas de un rebaño) no era una técnica aplicable a la medida de una curva continua (como el borde de un campo sembrado de trigo). La primera noción de tamaño se logró intuitivamente. Un linde era más largo que otro, un predio de terreno era más grande que otro. Más tarde, cuando los lindes de terrenos empezaron a marcarse más próximos entre sí, se necesitaron medidas más precisas. Cuando se convino en utilizar una unidad de medida (es decir, la parte de una soga que quedaba entre dos nudos), fue posible decir de un predio de terreno que su longitud era de "50 unidades de soga" y su anchura de "30 unidades de soga". Al aumentar las facilidades de viajar y los medios de comunicación, se hizo evidente que "50 unidades de soga" no representaba la misma longitud para las personas que no estuvieran familiarizadas con esa unidad. Surgió la necesidad de utilizar una unidad normalizada. Una vez que se aceptó una unidad normalizada, se construyó una escala para facilitar la medición.

Comparación y longitud

Un concepto fundamental de la idea de medición es la diferencia entre comparaciones de los tamaños de conjuntos o colecciones de objetos discretos, que pueden contarse, y comparaciones de conjuntos como los segmentos rectilíneos, que son conjuntos "continuos" de puntos, de manera que no se puede aplicar estrictamente la técnica de contar. Es significativo contar el número de objetos, cuando se comparan los tamaños de colecciones de canicas, o de huevos, o de las sillas en un salón, o de las páginas de un libro. Se ve claramente el significado de enunciados de comparación como los siguientes: "Tu colección de discos fonográficos es más grande que la mía. Conté 148 discos en tu colección y tengo solamente 110 discos en la mía".

Pero, si vamos a comparar los tamaños de dos segmentos rectilíneos, ¿qué podríamos contar? Ciertamente, no podemos contar el número de puntos de cada segmento, pues cualquiera de los dos segmentos contiene más puntos de los que se pueden contar. Entonces, evidentemente, contar los puntos no es un procedimiento factible de comparar los tamaños de dos segmentos rectilíneos.

Sin embargo, siempre podemos concebir la idea de comparar los tamaños de dos segmentos rectilíneos como, por ejemplo, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$,



colocando el segmento $\overline{AB}$ sobre $\overline{CD}$ de tal manera que el punto A coincida con el punto C, así:

En el ejemplo anterior, B queda entre C y D. Cuando esto sucede, decimos que $\overline{AB}$ es más corto que $\overline{CD}$ o que $\overline{AB}$ tiene una longitud menor que la de $\overline{CD}$. Para algunos segmentos rectilíneos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, podría suceder que B coincida con D; en este caso, diríamos que $\overline{AB}$ es de la misma longitud que $\overline{CD}$. (Recuérdese que en este caso, también decimos que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son

congruentes.) Podría suceder que D estuviera entre A y B; en este caso, diríamos que $\overline{AB}$ es más largo que $\overline{CD}$ o que $\overline{AB}$ es de mayor longitud que $\overline{CD}$.

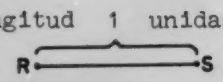
Cuando, los segmentos rectilíneos se pueden dibujar fácilmente en una hoja de papel, como en los ejemplos de la página 785, la comparación puede hacerse, aproximadamente, haciendo un calco de $\overline{AB}$ y colocándolo sobre el dibujo de $\overline{CD}$. Pero, aun cuando los segmentos rectilíneos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ fueran demasiado largos o demasiado cortos para poderse dibujar en una hoja de papel, todavía podríamos considerar los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de tal manera que exactamente uno de los siguientes enunciados sea cierto:

(1) $\overline{AB}$ es más corto que $\overline{CD}$.
(2) $\overline{AB}$ es de la misma longitud que $\overline{CD}$.
(3) $\overline{AB}$ es más largo que $\overline{CD}$.

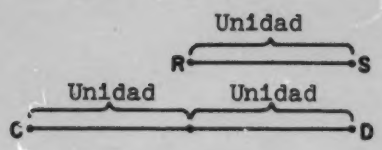
Recuérdese (del Capítulo 5) que en matemáticas, se consideran los extremos A y B de un segmento rectilíneo cualquiera AB como lugares exactos en el espacio, aunque esos extremos sólo pueden representarse aproximadamente, con marcas hechas con tizas o con lápices, etc. Del mismo modo, pensamos que el segmento rectilíneo $\overline{AB}$ tiene cierta longitud exacta, aunque esta longitud sólo puede determinarse aproximadamente, midiendo la representación de $\overline{AB}$, dibujada con una tiza o un lápiz.

Unidades y mediciones

Describamos el proceso de medición de un modo más preciso. El primer paso es la elección de un segmento rectilíneo, $\overline{RS}$, para utilizarlo como unidad. Esto significa que elegimos $\overline{RS}$ y convenimos en considerar su longitud como descrita o medida exactamente por el número 1.

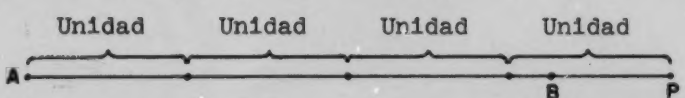


Ahora, podemos considerar un segmento rectilíneo $\overline{CD}$, de manera que la unidad $\overline{RS}$ pueda colocarse sobre $\overline{CD}$ exactamente dos veces, como se sugiere en la figura siguiente:



Decimos que la longitud de $\overline{CD}$ es de 2 unidades exactamente, aunque $\overline{CD}$ sólo se puede representar aproximadamente mediante un dibujo. Del mismo modo, podemos considerar segmentos rectilíneos de 3 unidades de longitud exactamente, o de 4 unidades exactamente o de un número grande cualquiera de unidades, aunque esos segmentos sólo pueden representarse aproximadamente. En efecto, si un segmento rectilíneo es muy largo, digamos, de un millón de pulgadas de longitud, no podríamos o no querríamos dibujarlo ni aún aproximadamente; pero, no obstante, podemos pensar en tal segmento.

También, podemos considerar un segmento rectilíneo $\overline{AB}$ tal que la unidad $\overline{RS}$ no quepa en $\overline{AB}$ un número cardinal de veces. En la siguiente figura, representamos un segmento rectilíneo $\overline{AB}$,



tal que, partiendo de A, la unidad pueda colocarse sobre $\overline{AB}$ 3 veces sin llegar al punto B y, si lleváramos la unidad sobre $\overline{AB}$ 4 veces, llegaríamos a un punto P más allá de B. ¿Qué podemos decir acerca de la longitud de $\overline{AB}$? Ciertamente, podemos decir que la longitud de $\overline{AB}$ es mayor que 3 unidades y menor que 4 unidades. En este caso particular, también podemos estimar por inspección que la longitud de $\overline{AB}$ está más cerca de 3 unidades que de 4 unidades. De modo que podemos decir que la longitud de $\overline{AB}$ es 3 unidades con la aproximación de una unidad. Esto es lo mejor que podemos hacer, si no consideramos partes fraccionarias de una unidad; de otro modo, tendríamos que elegir una unidad más pequeña.

Recalquemos un detalle referente a la terminología. En una frase como "longitud de 3 unidades", nos referimos al número 3 como la "medida 3". Lo que deseamos es simplemente tener una manera de referirnos a los números considerados de tal modo que podamos sumarlos, etc. Recuérdese que aprendimos a efectuar las

operaciones de la aritmética, como la adición, con números solamente. No sumamos yardas, como tampoco sumamos manzanas. Si tenemos 3 manzanas y 2 manzanas, tendremos 5 manzanas en total, porque $3 + 2 = 5$.

De igual modo, si tenemos 3 yardas de cinta y 2 yardas más de cinta, tendremos 5 yardas de cinta en total, también, porque

$$3 + 2 = 5.$$

Unidades normalizadas y sistemas de medidas

Después de aceptar una unidad normalizada para facilitar la comunicación, se ve la conveniencia de utilizar varias unidades normalizadas. La pulgada es una unidad apropiada para medir el borde de una hoja de papel, pero no es apropiada para determinar la longitud del corredor de la escuela. La yarda es una unidad apropiada para medir el corredor de la escuela, pero no sería conveniente utilizarla para determinar la distancia de Chicago a Filadelfia.

Las unidades normalizadas de medición lineal que consideramos en esta unidad, la pulgada, el pie, la yarda y la milla, son unidades del sistema angloamericano de medidas. En el siglo XVIII, en Francia, un grupo de científicos desarrolló el sistema de medidas que se conoce como el sistema métrico.

Debemos señalar de antemano dos cosas acerca del análisis breve del sistema métrico que presentamos a continuación. Primero, se analizan solamente las unidades de longitud. Hay también unidades métricas de volumen, piso, etc., pero no es necesario introducirlas aquí. Segundo, es nuestro propósito presentar el análisis para uso del maestro solamente. No esperamos, ni sería conveniente, que se presentara esta cuestión así a los alumnos. Lo único que se espera aprendan los alumnos acerca del sistema métrico es lo que aparece en el Texto del estudiante de esta unidad.

En el sistema métrico, la unidad básica de longitud es el metro, que es igual a 39.3 pulgadas, aproximadamente; es decir, igual a un poco más de 1 yarda. Así, en los Juegos Olímpicos, en los que se emplea el sistema métrico, tenemos la carrera de 100 metros, en la que se recorre un poco más de terreno que en

la carrera de 100 yardas.

La ventaja principal del sistema métrico sobre el sistema angloamericano está en que el sistema métrico se proyectó para pasar fácilmente de una unidad del sistema a otra unidad del mismo, mediante el sistema decimal de numeración. La unidad métrica que es igual a una décima de un metro se llama el decímetro. Así,

1 decímetro = 0.1 metro
10 decímetros = 1 metro

La unidad métrica que es igual a una centésima de un metro (y, por tanto, a una décima de un decímetro) se llama el centímetro. Así,

1 centímetro = 0.01 metro,
100 centímetros = 1 metro.

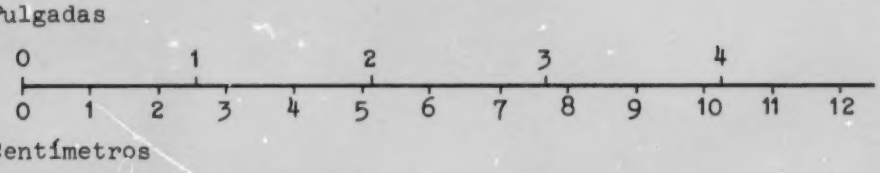
La unidad métrica que es igual a una milésima de un metro (y, por tanto, a una décima de un centímetro) se llama el milímetro. Así,

1 milímetro = 0.001 metro,
1000 milímetros = 1 metro.

Para ver lo fácil que es pasar de una unidad a otra, considérese una longitud de 3.729 metros. Para convertir esto en decímetros, tenemos solamente que multiplicar por 10, porque 10 decímetros = 1 metro. Por tanto, como $3.729 \times 10 = 37.29$, vemos que 3.729 metros = 37.29 decímetros.
Para convertir 3.729 metros en centímetros, tenemos solamente que multiplicar por 100, porque 100 centímetros = 1 metro. Por tanto, como $3.729 \times 100 = 372.9$, vemos que
3.729 metros = 372.9 centímetros.
Finalmente, para convertir 3.729 metros en milímetros, tenemos solamente que multiplicar por 1000, porque 1000 milímetros = 1 metro. Por tanto, como $3.729 \times 1000 = 3729$, vemos que
3.729 metros = 3729 milímetros.
También, puesto que
$3.729 = 3 + 0.7 + 0.02 + 0.009$,
podemos considerar que 3.729 es la suma de 3 metros, 7 decímetros, 2 centímetros y 9 milímetros. Esto relaciona el sistema

métrico y el concepto de valor de posición del sistema decimal de numeración.

Ya señalamos que el metro es la unidad del sistema métrico que corresponde aproximadamente a la yarda del sistema angloamericano. La unidad del sistema métrico que más se asemeja a la pulgada es el centímetro. Puesto que 1 metro es igual a 39.3 pulgadas, aproximadamente, y 1 centímetro = 0.01 metro, vemos que 1 centímetro es igual a 39.3 x 0.01 pulgadas, aproximadamente, o sea, 0.393 pulgadas. Esto es alrededor de 0.4 pulgadas, es decir, un poco menos de media pulgada. A continuación, se ilustran, para servir de comparación, una escala de pulgadas y una escala de centímetros:



Hasta ahora, no hemos dicho nada acerca de unidades métricas mayores que el metro. La más corriente de éstas es el kilómetro, que se define como 1000 metros. El kilómetro es la unidad métrica que mejor corresponde a la milla del sistema angloamericano. Un kilómetro es igual a un poco más de seis décimas de una milla:

1 kilómetro = 0.6 millas (aproximadamente).

Como el sistema métrico es el sistema de medidas oficial en muchos países y lo utilizan los científicos en todo el mundo, es conveniente que los alumnos lo conozcan. Al nivel del cuarto grado, se les presenta el centímetro, solamente.

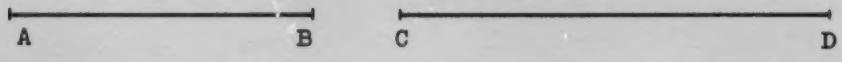
Estudiamos la pulgada, el pie, la yarda y la milla como unidades "normalizadas" de medición lineal, en contraste con unidades de tamaño arbitrario que pueden utilizarse, cuando la comunicación no lo exige. En realidad, la unidad normalizada para la medición lineal es el metro y los tamaños de otras unidades como el centímetro, la pulgada, el pie y la yarda se especifican con referencia al metro. La oficina federal National Bureau of Standards ha utilizado varios métodos para conservar

un patrón o modelo del metro normalizado. Durante muchos años, el patrón consistió en una barra de platino que se mantenía en condiciones atmosféricas estrictamente controladas. Ahora, la longitud de un metro se define como 1,650,763.73 veces la longitud de una onda de luz anaranjada del elemento kryptón 86. Se prefiere adoptar esta longitud del metro, porque puede reproducirse en cualquier buen laboratorio científico y proporciona un modelo más constante y preciso que la barra de platino.

Escalas y precisión

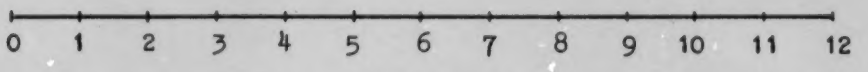
Una vez que se haya establecido un convenio acerca de la unidad que se ha de utilizar, la construcción de una escala simplifica grandemente la medición. Se puede construir una escala con una unidad no normalizada o con una unidad normalizada. Cuando utilizamos un segmento cuya longitud es una unidad normalizada para marcar una escala sobre un objeto de borde recto, construimos una regla para medir. Si, para esto, utilizamos la pulgada como unidad, construimos un objeto para medir que nos dará lecturas con la aproximación de una pulgada.

Debido a que cualquier segmento rectilíneo es continuo, cualquier medida de su longitud, obtenida con una regla es, a lo más, una medida aproximada. Cuando se mide un segmento rectilíneo, se elige una escala construida con una unidad adecuada para el propósito de la medición. La unidad es el segmento cuyos extremos están en dos marcas consecutivas de la escala de la regla. La regla se coloca a lo largo del segmento con el punto cero de la escala en un extremo del mismo. El número que corresponde a la marca divisora de la escala más cercana al otro extremo del segmento es la medida de éste. Así, toda medición se hace con la aproximación de una unidad. Si la pulgada es la unidad de medida de la regla, entonces, puede ocurrir que para dos segmentos rectilíneos que claramente no tienen la misma longitud, obtengamos la misma medida, con la aproximación de una pulgada.



La medida, en pulgadas, de $\overline{AB}$ es 2, con la aproximación de una pulgada. Escribimos esto así: m $\overline{AB}$ = 2. La medida en pulgadas, de $\overline{CD}$ es 2, con la aproximación de una pulgada; m $\overline{CD}$ = 2.

Podemos hacer mediciones más precisas, si utilizamos un segmento unidad más pequeño. Debe entenderse claramente que si se cambia la unidad, la escala también cambia. Así, si decidimos utilizar el centímetro como unidad, la escala resultaría así:



m $\overline{AB}$ (en centímetros) = 4
m $\overline{CD}$ (en centímetros) = 6

Ahora, las medidas indican que hay una diferencia entre las longitudes de los dos segmentos.

A veces, es más conveniente expresar una longitud de 31 pulgadas como 2 pies 7 pulgadas. Siempre que expresamos una longitud utilizando más de una unidad, se sobrentiende que la precisión de la medida viene indicada por la unidad más pequeña considerada. Una longitud de 4 yardas, 2 pies, 3 pulgadas es precisa con la aproximación de una pulgada. Está más próxima a 4 yardas, 2 pies, 3 pulgadas que a 4 yardas, 2 pies, 2 pulgadas o a 4 yardas, 2 pies, 4 pulgadas. Una longitud de 4 yardas, 2 pies nos indica que la longitud está más próxima a 4 yardas, 2 pies que a 4 yardas, 1 pie o a 4 yardas, 3 pies. Sin embargo, si se mide este segmento con la aproximación de una pulgada, tendríamos que indicarlo mediante la expresión 4 yardas, 2 pies, 0 pulgadas o 4 yardas, 2 pies, con la aproximación de una pulgada. La diferencia en la precisión de estas medidas es importante. Cuando la medición se hace con la aproximación de un pie, la longitud puede variar en un intervalo de un pie; si la medición, se hace con la aproximación de una pulgada, la longitud puede variar en un intervalo de una pulgada.

El cálculo del perímetro de un polígono constituye un

ejemplo de una medición lineal. Como introducción a la noción de perímetro, debe indicarse a los alumnos que la longitud es una propiedad de una curva, que no se altera, si la representación de la curva se mueve, se tuerce o se deforma. Así, la representación hecha con un alambre de una curva cualquiera puede enderezarse para representar un segmento de recta y su longitud puede, entonces, medirse con una regla. En esta unidad, se presenta el concepto de perímetro de un polígono como la longitud de un polígono. Si se conocen las longitudes de los lados de un polígono, se puede determinar inmediatamente el perímetro, sumando las medidas de los segmentos que son los lados, siempre que estén expresadas con la misma unidad. La plausibilidad de este método procede de la definición de perímetro como una longitud y de la propiedad de la longitud de no alterarse, si la curva se deforma.

CONCEPTOS

La unidad de medida debe ser de la misma clase que lo que se va a medir: un segmento rectilíneo como unidad para medir segmentos rectilíneos, un ángulo como unidad para medir ángulos, etc. Para facilitar la comunicación, se utilizan unidades normalizadas (pie, metro, grado, pie cuadrado, metro cuadrado, etc.)

La medida de un objeto geométrico (segmento rectilíneo, ángulo, región plana, región especial), en términos de una unidad, es el número (no necesariamente un número cardinal) de veces que la unidad puede estar contenida en el objeto.)

Las mediciones dan estimaciones por exceso y estimaciones por defecto de las medidas, mediante números cardinales de unidades. En los casos de segmentos rectilíneos y ángulos, también, se dan estimaciones con la aproximación de un número cardinal de unidades.

Los segmentos rectilíneos y las regiones pueden considerarse como modelos matemáticos de objetos reales. Se utilizan términos reales para describir objetos reales y también para analizar modelos matemáticos. Esto es admisible, siempre que se entienda la interpretación matemática correcta de los términos reales.

Una curva en el espacio puede tener longitud.

Algunas medidas de una figura pueden calcularse mediante otras medidas de la misma figura.

Un conjunto de segmentos disyuntos (varias partes separadas), también, puede tener la propiedad de la longitud.

LONGITUD

Un segmento rectilíneo es un conjunto de puntos consistente en dos puntos distintos A y B y todos los puntos entre A y B de la recta que contiene a A y B. Algunas veces, decimos "segmento", cuando se ve claramente que queremos decir "segmento rectilíneo".

Utilizamos un segmento rectilíneo como una unidad para medir segmentos rectilíneos.

Utilizamos la palabra "metro" para denotar el segmento que se acepta como la unidad normalizada para la medición lineal. Utilizamos las palabras "pulgada", "pie" y "yarda" para denotar otras unidades que se definen mediante la unidad normalizada.

La medida de un segmento rectilíneo en términos de una unidad es el número (no necesariamente un número cardinal) de veces que la unidad puede estar contenida en el segmento. Los segmentos unidad pueden tener extremos comunes, pero no otros puntos.

Al medir un segmento rectilíneo, cuando más pequeña sea la unidad, más pequeño es el intervalo de variación de la aproximación a la longitud exacta. La precisión de una medición depende del tamaño de este intervalo. Cuanto más pequeña es la unidad, más pequeño es el intervalo y más precisa la medición.

La longitud de un segmento rectilíneo, en términos de una unidad dada, consiste en (1) la medida de este segmento en términos de esta unidad y (2) la unidad utilizada. Ejemplo: La longitud de este segmento es 5 pulgadas; su medida (en pulgadas) es el número 5.

Muchas de las curvas familiares de un plano o del espacio, también tienen longitud. Podemos doblar un alambre hasta adaptarlo a la forma de la curva y, después, enderezarlo para representar un segmento.

Podemos calcular el perímetro de un triángulo o de otro polígono. Si las medidas de los lados de un triángulo (siendo la unidad de medición la pulgada), son 4, 5 y 6, respectivamente, entonces, el perímetro del triángulo resulta medido por el número 4 + 5 + 6, o sea, 15. Decimos que el perímetro del triángulo es 15 pulgadas.

Una figura que consiste en varios segmentos de recta que no se tocan puede tener longitud. La medida de la figura en términos de una unidad dada es la suma de las medidas de los segmentos separados en términos de esa unidad.

ENSEÑANZA DE LA UNIDAD

Cada una de las secciones de la unidad está dividida en Exploración y Conjunto de problemas. En la mayoría de las secciones, se puede llegar a una generalización para completar la Exploración. Sin embargo, en algunos casos, quizás, sea necesario que el maestro presente otras ilustraciones o dirija tareas adicionales para llegar a la generalización deseada.

Los alumnos deberán trabajar los Conjuntos de problemas independientemente. Como los Conjuntos de problemas sirven, no solamente para afianzar los conocimientos y proporcionar práctica con los mismos, sino también para presentar nuevos conceptos, se sugiere que se analicen los problemas después que los estudiantes los hayan resuelto.

Quizás, el maestro desee pedir a los alumnos que estudien algo acerca de la historia de la medición. Hay varios buenos libros de información y tablas comerciales que sirven para este propósito.

COMPARACION DE TAMAÑOS

Objetivo: Explicar las ideas y técnicas siguientes:

1. El tamaño de una colección de objetos separados (discretos) puede determinarse contando los objetos.
2. El tamaño de un objeto continuo, como un segmento rectilíneo, no puede determinarse contando solamente.
3. Los tamaños de dos colecciones de objetos discretos pueden compararse sin tener que contar, mediante el método de apareamiento.
4. Los tamaños de dos segmentos de recta pueden compararse, colocando una copia de uno sobre el otro.
5. Un modelo material de una curva puede "enderezarse" sin que se altere su longitud.
6. Un compás es un instrumento útil para comparar tamaños de segmentos.

Materiales necesarios:

Maestro: Una colección de objetos pequeños como cuentas, bolitas, lápices, borradores o libros, trozo de cuerda, compás para utilizarlo en la pizarra, regla.

Estudiante: Trozo de cuerda, compás, lápices de colores

Vocabulario: Segmento rectilíneo, curva

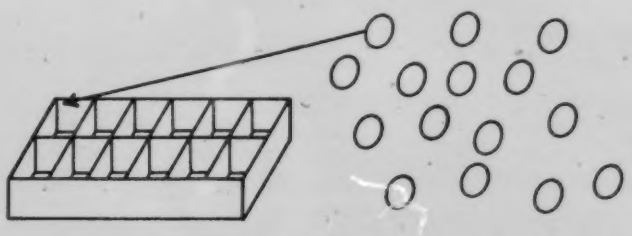
Preguntas acerca del tamaño

Esta Exploración sirve como una introducción a la sección Comparación de tamaños.

Comparación de tamaños sin contar

Después que los alumnos resuelvan los primeros cuatro ejercicios de la Exploración de la página E451, se les debe asignar algunas tareas como la que se da más adelante, para que adquieran un mejor conocimiento intuitivo de la comparación de tamaños, sin tener que contar. Los alumnos deben dibujar figuras en sus hojas de papel y aparear los objetos, dibujando una raya que indique el apareamiento de un objeto de un conjunto con un objeto del otro. Debe conducírseles a que se den cuenta clara de la idea de que un conjunto es mayor que otro, si después de efectuar el apareamiento, le sobran algunos elementos sin aparear.

A continuación, se utiliza como ejemplo una caja para colocar huevos y un conjunto de huevos. La raya indica el apareamiento de un huevo con un compartimiento de la caja. Pídase a los alumnos que representen la caja y el conjunto de huevos en sus hojas de papel y que, luego, apareen cada huevo con un compartimiento de la caja, si es posible.



Háganse las siguientes preguntas:
¿Queda algún compartimiento sin aparear con un huevo?
¿Queda algún huevo sin compartimiento?
¿Cuál de los conjuntos es más grande?

Uso de un compás para comparar segmentos

El uso de un compás para comparar segmentos se repasa en la Exploración de la sección Uso de un compás para medir segmentos de recta.

E451

Capítulo 9

MEDICION LINEAL

COMPARACION DE TAMAÑOS

Preguntas acerca del tamaño

Exploración

¿Cuántas de las preguntas que haces y que otras gentes hacen también empiezan con "¿Cuánto?" "¿Cuántos?' "¿Cuán lejos?"

Decimos: "¿Cuántos alumnos hay en tu clase?"

"¿Qué largo tiene el pasillo que está en la parte de afuera de tu salón de clase?"

"¿Cuán lejos está Pittsburgh de Nueva York?"

Para contestar estas preguntas, utilizamos números.

Hay 32 alumnos en la clase.

El pasillo tiene 320 pies de largo.

De Nueva York a Pittsburgh hay 450 millas.

Las respuestas a algunas de estas preguntas se pueden obtener, contando. Otras respuestas no se pueden obtener simplemente contando. ¿Por qué? (Porque los conjuntos comprendidos contienen más puntos de los que pueden contarse.)

E452

¿Cuáles de los siguientes tamaños se pueden hallar con sólo contar? (1, 3, 6, 8)

1. El tamaño de tu clase
2. La altura del muchacho más alto de tu clase
3. El tamaño de tu familia
4. El tamaño de tu salón de clase
5. La longitud de una tablilla de libros
6. El tamaño de ura colección de piedras
7. El tamaño de la piedra más pequeña de la colección
8. Los habitantes de tu pueblo
9. Con qué fuerza está soplando el viento
10. El tamaño de una rueda de bicicleta

Piensa en una colección de piedras. ¿Qué puedes decir acerca de la colección con sólo contar? ¿Hay algo que no puedes decir acerca del tamaño de la colección de piedras con sólo contar?

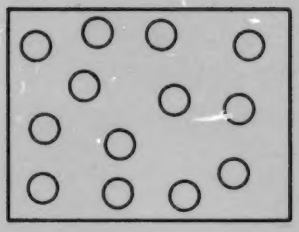
Puedes decir el tamaño de una colección de piedras con sólo contar, porque cada piedra es una cosa separada de las demás. Una piedra puede ser grande o pequeña, pero es una piedra.

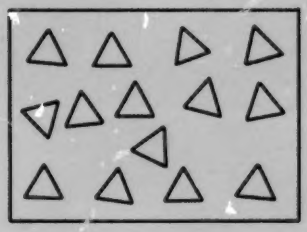
No puedes decir el tamaño de cualquier piedra con sólo contar. Es una piedra, pero puede ser grande o pequeña.

E453

COMPARACION DE TAMAÑOS SIN CONTAR

Exploración





Sin contar, ¿cómo podría decir qué conjunto tiene más elementos?
(Mediante un apareo de los elementos.)

1. Un niño explorador trae una bolsa de barras de dulce a una reunión de su grupo. ¿Cuál es una forma fácil de decir, sin contar, si hay más niños o más barras de dulce?
(Dése a cada niño una barra de dulce.)

2. En un almacén de la escuela, hay un surtido de pupitres y un surtido de sillas. ¿Cómo puedes decir cuál es el mayor?
(Colóquese una silla al lado de cada pupitre.)

3. ¿Cómo puedes explicar el modo de comparar la asistencia a un cine con su capacidad de asientos? (Viendo si todos los asientos están ocupados y si alguna persona no tiene asiento.)

4. ¿Cómo puedes decir si hay más salchichas o más panecillos? (Si es posible, colocando exactamente una salchicha en cada panecillo.)

Puedes comparar los tamaños de objetos cuyo tamaño no se puede hallar simplemente contando.

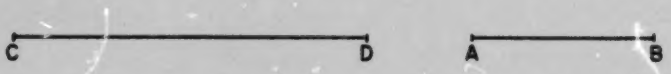
5. He aquí ilustraciones de dos trozos de cuerda:

¿Cuál de los trozos crees que es más largo, A o B?

Si tuvieras las cuerdas en vez de las ilustraciones, ¿cómo podrías decir cuál es más larga?

Para comparar líneas curvas como las de las ilustraciones, coloca una cuerda a lo largo de cada curva. Luego estira las cuerdas. ¿Qué figura geométrica representan las cuerdas estiradas? (segmentos rectilíneos)

6. Supongamos que deseas comparar $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.



Para demostrar a alguien que $\overline{CD}$ es más largo que $\overline{AB}$, aplica una cuerda estirada sobre $\overline{AB}$. Con los dedos, sostén los puntos de la cuerda que coinciden con A y B. Mueve la cuerda y colócala sobre $\overline{CD}$ con un extremo en C. ¿Está el otro extremo en D? Puesto que está entre C y D, $\overline{CD}$ es más largo que $\overline{AB}$. ¿En qué se parece comparar segmentos, para ver cuál es el más largo, a aparear grupos de objetos individuales para comparar los tamaños de los grupos sin contar? (En ambos casos, comparamos directamente, en vez de utilizar números para hacer estimaciones de los tamaños.)

7. Hay muchas cosas que son bastante parecidas a nuestra idea de un segmento rectilíneo, de manera que podamos pensar en ellas como segmentos rectilíneos, por ejemplo,

una cuerda estirada,

algunas marcas de lápiz sobre una hoja de papel,

el borde de una mesa,

un lápiz.

Nombra algunas otras cosas que podríamos considerar como segmentos rectilíneos.

8. Recuerda que entre dos puntos cualesquiera en el espacio, hay solamente un segmento rectilíneo. Si tenemos dos objetos, los cuales consideramos como puntos, podemos también pensar en ellos como extremos de un segmento rectilíneo. Así es que pensamos cuando consideramos:

   la distancia entre las dos puntas de un compás,

   la distancia entre la tierra y una estrella,

   la distancia del puesto del bateador a la segunda base,

   la altura a que vuela un aeroplano.

   Menciona diversas maneras de pensar en segmentos rectilíneos, considerando objetos como sus extremos.

9. El camino que recorres para ir a la escuela probablemente no se parece a un segmento rectilíneo. Una ilustración de él podría parecerse a esto:

   Podemos todavía hablar acerca de la distancia que recorres al ir a la escuela. El camino puede considerarse como una línea curva, pero no como un segmento rectilíneo. ¿Qué significa para las curvas la distancia o la longitud? Pensamos en la curva como representada por un trozo de alambre o cuerda. Entonces, imaginamos estirar el alambre o cuerda para representar un segmento rectilíneo.

E457

Conjunto de problemas 1

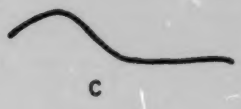
Usa cuerdas para comparar los segmentos rectilíneos y otras curvas. Copia cada enunciado que está debajo de las figuras y escribe "más largo(a)" o "más corto(a)" en el espacio en blanco.

$\overline{AB}$ es (más corto) que $\overline{CD}$.

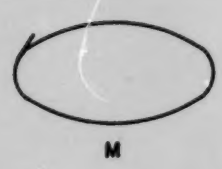
$\overline{RS}$ es (más corto) que $\overline{TW}$.

La curva A es (más corta) que la curva B.

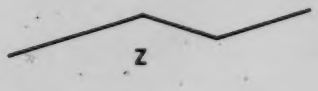
E458

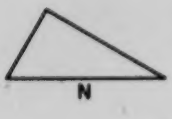


La curva C es (más larga) que la curva D.



La curva M es (más larga) que la curva K.





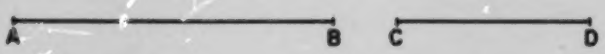
La curva Z es (más corta) que la curva N.

E459

USO DE UN COMPAS PARA COMPARAR SEGMENTOS

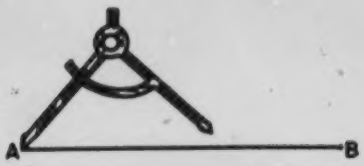
Exploración

¿Es $\overline{AB}$ más largo que $\overline{CD}$?

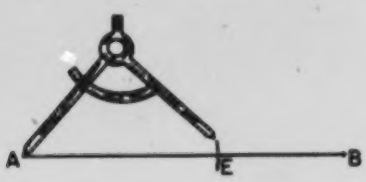


Recuerda cómo has usado un compás para comparar segmentos. Coloca las puntas de tu compás sobre C y D.

Sin cambiar el compás, coloca la punta afilada sobre A.



Dibuja una parte pequeña de una circunferencia que interseque a $\overline{AB}$. Designa la intersección con E.



E está entre A y B, así $\overline{AB}$ es más largo que $\overline{AE}$. $\overline{AE}$ tiene la misma longitud que $\overline{CD}$, así $\overline{AB}$ es más largo que $\overline{CD}$.

E460

Conjunto de problemas 2

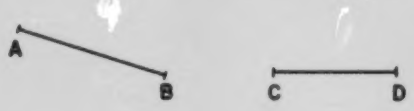
Traza las siguientes figuras en tu hoja de papel.

Utiliza el compás o la cuerda como ayuda para comparar segmentos.

Copia y contesta la pregunta de cada ejercicio.

Colorea la parte no ajustada del segmento más largo.

1.

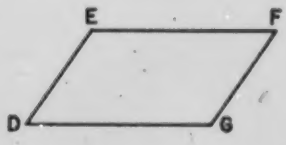


¿Cuál es más largo, $\overline{AB}$ o $\overline{CD}$? ($\overline{AB}$)

2.

¿Cuál es más largo, $\overline{AB}$ o $\overline{AC}$? ($\overline{AC}$)

3.



¿Cuál es más largo, $\overline{DE}$ o $\overline{EF}$? ($\overline{EF}$)

Medición de segmentos

Quizás, el maestro quiera emplear algunos instrumentos de medición que no sean el lápiz o la mano. Para esto, servirían palillos de dientes, borradores de pizarra o cualquier otro objeto que tenga igual longitud. Además de las tareas sugeridas en la Exploración, proporciónese a los alumnos práctica, mediante la medición de objetos en el salón, utilizando unidades no normalizadas. Utilícense instrumentos de medición como los siguientes: un trozo de cuerda con dos nudos que disten alrededor de 10 pulgadas; el pie de uno de los alumnos, el borde de una hoja de papel. Quizás, el maestro quiera realizar más ejercicios parecidos a los que se proponen en la Exploración de la sección Medición con la aproximación de una unidad del Texto del estudiante, antes de asignar el Conjunto de problemas 5. Analícense los resultados obtenidos para recalcar las siguientes ideas:

(a) La unidad de medida para un segmento rectilíneo es un segmento rectilíneo.

(b) La medida es un número. (Ejemplo: la medida de $\overline{CD}$ puede ser 7.)

(c) La longitud de un segmento incluye la medida y la unidad de medida. (Ejemplo: 3 pulgadas, 7 pulgadas, etc.)

(d) Si un segmento se mide con unidades diferentes, la unidad de medida mayor se asocia con la medida menor. Por ejemplo, la medida del borde del pupitre, tomando como unidad un lápiz, será mayor que su medida en palmos, si el palmo es más largo que el lápiz.

(e) Los instrumentos de medición deben emplearse con cuidado, de modo que los segmentos unidad sucesivos se toquen solamente por sus extremos, es decir, deben tener un punto común y sólo uno.

E461

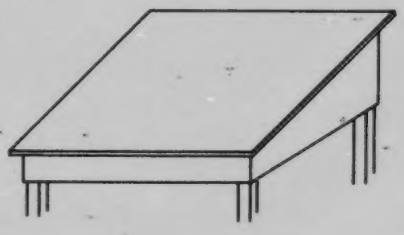
MEDICION DE SEGMENTOS

Exploración

Sabes que no puedes decir el tamaño de un segmento con sólo mirarlo y contar. Puedes decir cuán largo es, comparándolo con algún otro segmento.

¿Cómo puedes decir cuál es el largo de tu escritorio? (Comparándolo con algún otro segmento.)

¿Qué figura geométrica representa el borde de tu escritorio? (Un segmento rectilíneo)



1. Toma tu lápiz.
   Aplícalo sobre el borde de tu escritorio, con un extremo en la esquina. Pon un dedo sobre el escritorio en el otro extremo del lápiz. Partiendo de este punto, ahora, aplica el lápiz otra vez sobre el escritorio. ¿Cuántos largos de lápiz mide el borde de tu escritorio? (Hay varias respuestas posibles.)
2. La gente a menudo usa sus manos para indicar cuán largo es un segmento. Extiende tu mano derecha, de manera que los dedos estén tan separados como sea posible. Aplica tu mano derecha con tu pulgar sobre la esquina izquierda de tu escritorio. Averigua cuántos palmos mide tu escritorio. (Hay varias respuestas posibles.)

El segmento representado por tu lápiz o tu palmo se llama una unidad de medida.

El número de largos de lápiz o palmos que se emplearon para cubrir por completo el borde de tu escritorio es la medida de tu escritorio. Una medida de tu escritorio puede ser 7.

Para nombrar una longitud, usamos tanto la medida como la unidad de medida. Una longitud de tu escritorio puede ser 5 palmos.

E462

Conjunto de problemas 3

Copia y completa cada uno de los enunciados:

1. Nuestra familia se toma tres cuartillos de leche todos los días.

   a. La unidad de medida es (cuartillo).

   b. La medida es (3).

   c. La cantidad de leche es (3 cuartillos).

2. Mi perro pesa 18 libras.

   a. La unidad de medida es (libra).

   b. La medida es (18).

   c. Su peso es (18 libras).

3. Mi escritorio tiene 9 barras de tiza de largo.

   a. Su longitud es (9 barras de tiza).

   b. Su medida es (9).

   c. La unidad de medida es (barra de tiza).

En los ejercicios del 4 al 9, usa las palabras longitud, medida o unidad de medida, de manera que cada enunciado tenga sentido.

4. Se necesitan 6 barras de tiza para cubrir el borde de mi escritorio. Su (medida) es 6.

5. Mi escritorio mide 4 largos de lápiz.
   Su (longitud) es 4 lápices.

6. Mi escritorio mide 4 palmos de largo.
   La (unidad de medida) es el palmo.

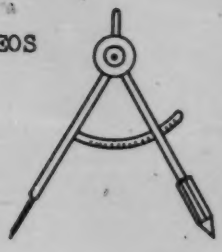
7. La (medida) en palmos es 5.

8. La (unidad de medida) que utilicé es un segmento representado por un lápiz.

9. El borde de mi escritorio tiene una (longitud) de 4 lápices.

E463

USO DE UN COMPAS PARA MEDIR SEGMENTOS RECTILINEOS



Exploración

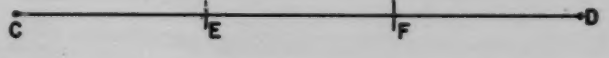
Queremos hallar la medida de $\overline{CD}$.
Utilizamos nuestro compás como ayuda para medir un segmento rectilíneo.

Nuestra unidad de medida es $\overline{AB}$.

He aquí $\overline{AB}$:

Colocamos la unidad $\overline{AB}$ sobre $\overline{CD}$.
Colocamos la unidad $\overline{AB}$ sobre $\overline{CD}$ tres veces.
Designamos las intersecciones con E y F.

Observa la figura siguiente:



Decimos que la medida de $\overline{CD}$ es 3.
Escribimos: m $\overline{CD}$ = 3.

¿Cuál es la medida de $\overline{CE}$? (m $\overline{CE}$ = 1)
¿Cuál es la medida de $\overline{CF}$? (m $\overline{CF}$ = 2)
¿Cuál es la medida de $\overline{ED}$? (m $\overline{ED}$ = 2)

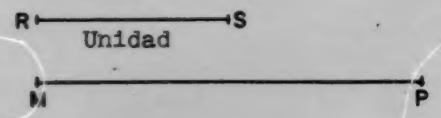
813 317

E464

Conjunto de problemas 4

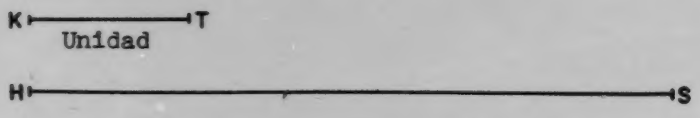
Copia cada uno de los segmentos de los ejercicios 1 y 2. Halla la medida de cada segmento.

1.



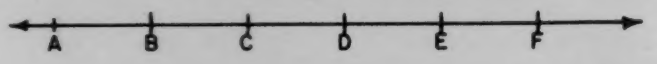
m $\overline{MP}$ = (2)

2.



m $\overline{HS}$ = (4)

3. Determina las medidas de los segmentos en la figura:



m $\overline{AE}$ = (4)
m $\overline{AD}$ = (3)
m $\overline{BE}$ = (3)
m $\overline{CF}$ = (3)
m $\overline{BF}$ = (4)
m $\overline{AF}$ = (5)

4. Escribe el nombre de un segmento cualquiera que tiene la medida dada. Usa la unidad y la figura para el ejercicio 3.

m $\overline{AC}$ = 2
($\overline{BD}$ = 2, $\overline{CE}$ = 2, $\overline{DF}$ = 2)

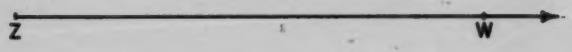
m $\overline{AB}$ = 1
($\overline{BC}$ = 1, $\overline{CD}$ = 1, $\overline{DE}$ = 1, $\overline{EF}$ = 1)

E465

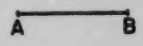
MEDICION CON LA APROXIMACION DE UNA UNIDAD

Exploración

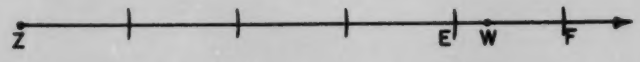
Queremos hallar la medida de $\overline{ZW}$.



Utilizamos $\overline{AB}$ como unidad de medida.



Esta figura muestra cómo podemos hallar la medida de $\overline{ZW}$, utilizando $\overline{AB}$ como unidad.



¿Cuántas veces puedes colocar la unidad sobre $\overline{ZW}$?

m $\overline{ZE}$ = 4. ¿Es m $\overline{ZW}$ más grande que 4? (Sí) ¿Por qué?
(Porque E está entre Z y W.)

m $\overline{ZF}$ = 5. ¿Es m $\overline{ZW}$ más pequeña que 5? (Sí) ¿Por qué?
(Porque W está entre Z y F.)

La medida de $\overline{ZW}$ está entre 4 y 5 unidades.

Puesto que W está más cerca de E que de F, decimos que

m $\overline{ZW}$ = 4, <u>con la aproximación de una unidad</u>.

Conjunto de problemas 5

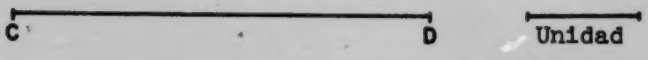
Dibuja las figuras para cada uno de los siguientes ejercicios; halla las medidas de los segmentos con la aproximación de una unidad:

1.

La longitud de $\overline{AB}$ es mayor que (2) unidades, pero menor que (3) unidades.

m $\overline{AB}$ = (2) (con la aproximación de una unidad)

2.



La longitud de $\overline{CD}$ es mayor que (3) unidades, pero menor que (4) unidades.

m $\overline{CD}$ = (4) (con la aproximación de una unidad)

3.

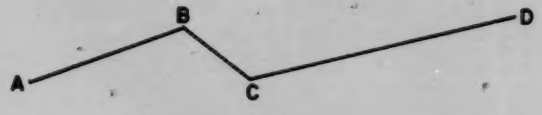
La longitud de $\overline{RS}$ es mayor que (2) unidades, pero menor que (3) unidades.

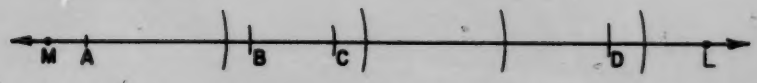
m $\overline{RS}$ = (3) (con la aproximación de una unidad)

E467

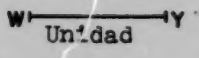
PROBLEMA DIFICIL

Sobre $\overleftrightarrow{ML}$, dibuja un segmento cuya longitud es la longitud de la curva ABCD.





Ahora, halla la medida de la curva ABCD. Usa $\overline{WY}$ como unidad.



La longitud de la curva ABCD es mayor que (4) unidades, pero menor que (5) unidades.

m ABCD = (4) (con la aproximación de una unidad)

USO DE UNIDADES NORMALIZADAS DE LONGITUD

Objetivo: Explicar las siguientes ideas y técnicas:

1. El uso de las unidades normalizadas de medida se originó con propósitos de comunicación.

2. Muchas de las unidades normalizadas de medida se desarrollaron a partir de unidades no normalizadas.

3. Dos segmentos unidad de tamaño normalizado son la pulgada en el sistema angloamericano y el centímetro en el sistema métrico.

Materiales necesarios:

Maestro: Compás para utilizarlo en la pizarra, regla.

Estudiantes: Compás, tijeras, regla.

Vocabulario: Pulgada, centímetro

Quizás, los alumnos se interesen en saber qué métodos emplea el gobierno local para controlar los instrumentos de medición que utilizan los comerciantes. Los siguientes libros contienen lectura interesante acerca del desarrollo de la medición:

Hogben, Lancelot Thomas, Wonderful World of Mathematics, 1955 (Garden City) Doubleday.

Newman, James R., ed., World of Mathematics, 1956, Simon and Schuster.

Los alumnos pueden presentar informes interesantes sobre diversos temas relacionados con la medición, utilizando enciclopedias y otros libros de información.

Después de completar la sección Uso de unidades normalizadas de longitud en el Texto del estudiante, convendría presentar un ejercicio oral en el que los alumnos den el nombre de la unidad normalizada que complete cada uno de varios enunciados. Los siguientes enunciados servirían para tal ejercicio:

La enfermera escolar dice que pesa 65 (libras).

Mi madre compra 3 (galones, litros o pintas) de leche, diariamente.

Tuvimos un día caluroso. El termómetro marcó 80 (grados).

Mi papá se detuvo en la estación de gasolina y compró 10 (galones) de gasolina.

Fuimos en automóvil a visitar a mi tía que vive en un pueblo a 80 (millas) de aquí. Empleamos 2 (horas) en llegar allá.

En el Texto del estudiante, no se indican las marcas del compás en los segmentos representados en los problemas del 1 al 8 del Conjunto de problemas 6.

En esta sección, los alumnos construyen y utilizan una escala en pulgadas y una escala en centímetros.

E468

USO DE UNIDADES NORMALIZADAS DE LONGITUD

Exploración

Supongamos que un equipo de muchachos de tu escuela va a celebrar un partido de béisbol contra un equipo de otra escuela. Si el otro equipo trae una pelota de béisbol tan grande y pesada que escasamente podrías levantarla, ¿qué dirías? Probablemente, dirías, "Nosotros no jugaremos con esa pelota de béisbol. No es del tamaño y peso reglamentario o normalizado". ¿Qué significa eso? ¿Puedes encontrar el tamaño normalizado de una pelota de béisbol?

Has estado usando unidades de medida que no eran del tamaño "normalizado". Ahora, tomaremos las unidades normalizadas que utilizan un gran número de personas y que siempre significan la misma cantidad. El tamaño de una unidad normalizada se fija por ley.

¿En cuál de los siguientes enunciados se usan unidades normalizadas?

1. Eres tan fuerte como un buey.
2. Pon una pizca de sal.
3. Tenemos $\frac{1}{2}$ pinta de leche para el almuerzo.
4. El maíz está a la altura de las rodillas.
5. Yo vivía a un día de viaje de aquí.

Estás familiarizado con muchas unidades normalizadas. Nombra algunas de estas unidades. (libra, pie, yarda, etc.)

Los pueblos primitivos tuvieron poca necesidad de unidades normalizadas. Si al hombre de las cavernas le gustaba el tamaño de la lanza de su vecino, podía pedir prestada la lanza y copiar su longitud. O, podía pensar, "Cuando la lanza se sostiene con un extremo apoyado en la tierra, el otro extremo llega a mi hombro". Luego, podía hacer una lanza con aquella misma longitud.

Muchas de las unidades normalizadas que usamos tienen su origen en unidades que no eran normalizadas. Estas fueron usadas desde hace mucho tiempo. Muchas procedían del uso de miembros del cuerpo.

Una pulgada procedió del uso de una parte característica de un dedo como unidad de longitud. ¿Puedes hallar una parte de tu dedo que mide alrededor de una pulgada de largo?

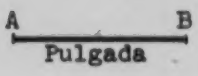
Un pie procedió de la longitud del pie de una persona. ¿Es el pie tuyo más corto o más largo que una regla de un pie?

En un tiempo, se consideró una yarda como la distancia de la punta de la nariz de una persona hasta la punta de su dedo corazón, cuando su brazo se mantenía extendido. ¿Es la distancia de la punta de tu nariz a la punta de tu dedo tan larga como la yarda graduada de medir?

E470

He aquí un modelo de una unidad normalizada:

Has utilizado esta unidad a menudo.



Es la pulgada.

Nombra algunos objetos que mides en pulgadas.

He aquí un modelo de otra unidad normalizada.

Esta unidad puede ser nueva para ti.

Es el centímetro.

Si vivieras en Francia, o en muchos otros países, usarías este segmento como unidad, en vez de la pulgada. Los científicos de todos los países usan esta unidad.

326

E471

Conjunto de problemas 6

Dibuja cada figura de los ejercicios del 1 al 8 en tu hoja de papel. Usa el compás o una cuerda para hallar las medidas del segmento.

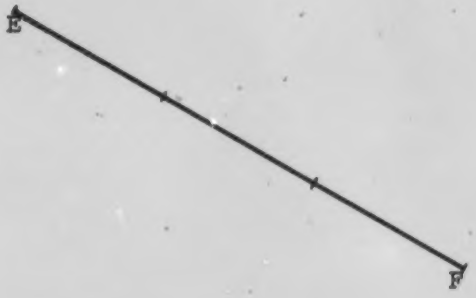
Copia y completa el enunciado de cada ejercicio.

Para los ejercicios del 1 al 4, usa $\overline{AB}$ como el segmento unidad. Da tu respuesta con la aproximación de una pulgada.

1.

m $\overline{CD}$ = (2), en pulgadas

2.



m $\overline{EF}$ = (3), en pulgadas

3.

m $\overline{GH}$ = (3), en pulgadas

4.

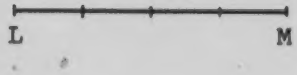
m $\overline{LM}$ = (5), en pulgadas

E472

Para los ejercicios del 5 al 8, usa $\overline{RS}$ como el segmento unidad.

Da tu respuesta con la aproximación de un centímetro:

5.



m $\overline{LM}$ = (4), en centímetros.

6.

m $\overline{NO}$ = (5), en centímetros.

7.

m $\overline{PQ}$ = (6), en centímetros.

8.

m $\overline{TW}$ = (2), en centímetros.

E473

9. Haz dos copias de $\overline{NK}$.

Halla la medida de $\overline{NK}$ en pulgadas.

Pulgada

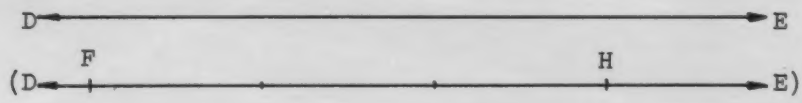
Luego, halla su medida en centímetros.

Centímetro

m $\overline{NK}$ (en pulgadas) = (3)

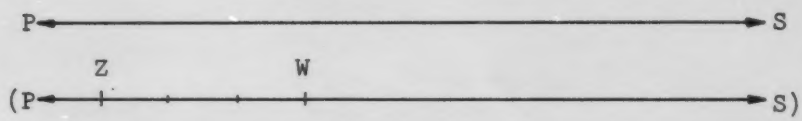
m $\overline{NK}$ (en centímetros) = (8)

10. Dibuja $\overline{DE}$.



Sobre $\overline{DE}$, dibuja un segmento cuya medida, en pulgadas, es 3. Denótalo con $\overline{FH}$.

Dibuja $\overline{PS}$.



Sobre $\overline{PS}$, dibuja un segmento cuya medida, en centímetros, es 3. Denótalo con $\overline{ZW}$.

m $\overline{FH}$ (en pulgadas) = (3)

m $\overline{ZW}$ (en centímetros) = (3)

¿Es $\overline{FH}$ congruente con $\overline{ZW}$? (no)

ESCALAS DE MEDIDAS

Objetivo: Explicar las siguientes ideas y técnicas:

1. Una escala lineal es un instrumento que se utiliza por conveniencia para medir segmentos.

2. Una escala lineal se construye, colocando segmentos unidad reiteradamente sobre un rayo. A los extremos de los segmentos consecutivos (llamados puntos divisorios o divisiones de la escala) se le asignan números cardinales, asignando el 0 al extremo del rayo.

3. Un compás y una escala lineal pueden utilizarse para medir un segmento dado.

4. Cuando se utiliza una escala lineal para medir un segmento, la medida se determina por el número asignado a la división o punto divisorio de la escala más próximo al extremo del segmento.

Materiales necesarios:

Maestro: Regla, compás para utilizarlo en la pizarra

Estudiantes: Compás

Vocabulario: Escala, escala lineal, $\overrightarrow{r}$ (rayo r), escala marcada en pulgadas, divisiones o puntos divisorios de una escala.

E474

ESCALAS DE MEDIDAS

Construcción de escalas de pulgadas y centímetros

Exploración

Cuando mides segmentos, es conveniente tener una escala.

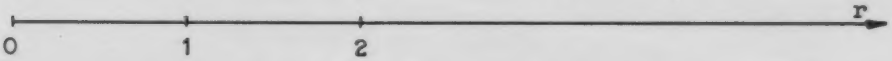
Sigue estas instrucciones para hacer una escala marcada en pulgadas en el rayo r:

(Algunas veces, nombramos un rayo por una sola letra como $\overrightarrow{r}$.)

Pulgada

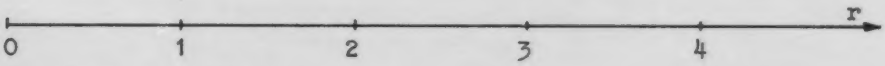
1. Marca cero debajo del extremo de $\overrightarrow{r}$. Luego, usa el compás para copiar el segmento unidad que llamamos pulgada, empezando en 0. Marca el otro extremo con 1.

2. Copia el segmento unidad otra vez, empezando en 1. Marca el otro extremo con 2.



3. Continúa copiando el segmento unidad hasta que lo hayas copiado cinco veces. Marca los extremos de los segmentos unidad. Escribe "pulgada" debajo de 0.

¿Resulta tu dibujo como el siguiente?



pulgada

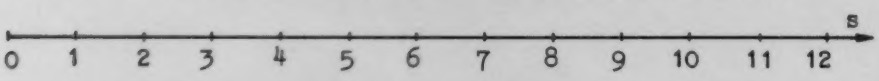
Guarda tu escala.

E475

4. Traza el rayo s. En el rayo s, marca una escala en centímetros.

Centímetro

5. ¿Cuál es el número más grande de tu escala en centímetros? (13 ó 14)
¿Cuál es el número más grande de tu escala en pulgadas? (5)
¿Se parece tu escala en centímetros a la siguiente?



centímetro

Guarda tu escala en centímetros, también.

6. Puedes usar tus escalas para hallar la medida de un segmento en pulgadas y en centímetros.
Copia y halla la medida de $\overline{KW}$, en pulgadas.

Coloca tu compás con las puntas sobre K y W.
Sin cambiar la abertura del compás, coloca la punta metálica en el punto cero de la escala en pulgadas y la punta del lápiz en el rayo. ¿Qué punto en la escala está más próximo al punto del lápiz? (3) ¿Cuál es su número? (3) ¿Cuál es la medida de $\overline{KW}$ en pulgadas? (3)

7. Halla la medida de $\overline{KW}$ en centímetros. (7) Usa tu compás y tu escala.

Conjunto de problemas 7

Usando tu escala de pulgadas y tu escala de centímetros, determina la medida de los siguientes segmentos; expresa las medidas en pulgadas y en centímetros:

1.

m $\overline{AB}$ (en pulgadas) = (4)

m $\overline{AB}$ (en centímetros) = (9)

2.

m $\overline{CD}$ (en pulgadas) = (3)

m $\overline{CD}$ (en centímetros) = (8)

3.

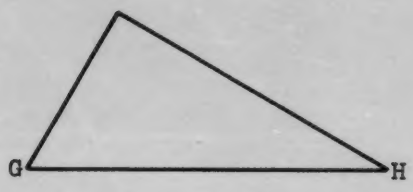
m $\overline{EF}$ (en pulgadas) = (1)

m $\overline{EF}$ (en centímetros) = (3)

E477

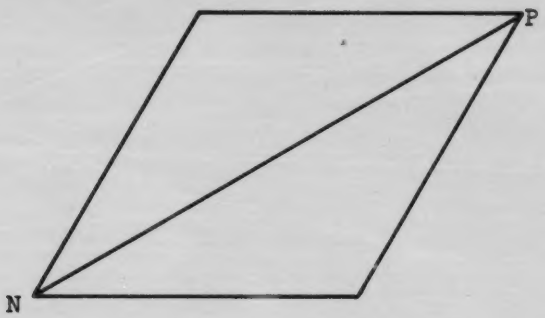
En estas figuras, se marcaron con letras los extremos de un segmento. Halla la medida del segmento, en centímetros.

4.



m $\overline{GH}$ (en centímetros) = (5)

5.



m $\overline{NP}$ (en centímetros) = (8)

USO DE ESCALAS LINEALES DE MEDIDA

Objetivo: Explicar los siguientes conocimientos y técnicas:

1. Un objeto de borde recto marcado con una escala lineal basada en un segmento unidad de tamaño normalizado es una regla graduada.
2. Para medir un segmento con una regla, se coloca la regla a lo largo del segmento, de manera que una división o punto divisorio de la regla coincida con un extremo del segmento.
3. Si el punto 0 de la escala coincide con un extremo del segmento, la medida del segmento es el número que corresponde a la división o punto de la escala más próximo al otro extremo. Si el punto 0 no se utiliza, la medida es la diferencia entre los números que corresponden a los extremos del segmento. Obsérvese que a veces, colocamos una regla de maneras diferentes, porque el extremo de la regla se ha desgastado.

Materiales necesarios:

Maestro: Regla, compás

Estudiantes: Regla, compás, regla de cartulina

Vocabulario: Regla

Quizás, el maestro desee sugerir que, para obtener medidas mejores, es conveniente emplear un compás y una regla, de la misma manera que se utilizaron el compás y la escala lineal en la sección anterior.

La escala en pulgadas y la escala en centímetros

En la Exploración anterior, se utilizaron una escala y un compás. En esta Exploración, se introduce el uso de la escala solamente. Algunos alumnos estarán seguramente familiarizados con la escala en pulgadas, pero probablemente habrán tenido pocas oportunidades de utilizar escalas en centímetros.

E478

LA ESCALA EN PULGADAS Y LA ESCALA EN CENTIMETROS

Exploración

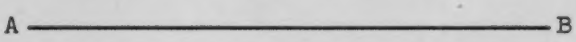
Has construido una escala en pulgadas y una escala en centímetros.

Has empleado estas escalas para hallar medidas de segmentos rectilíneos.

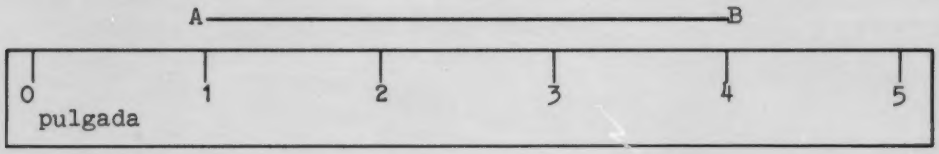
Has hallado medidas de segmentos rectilíneos de otras maneras, también.

Ahora, utilizaremos solamente las escalas de medidas.

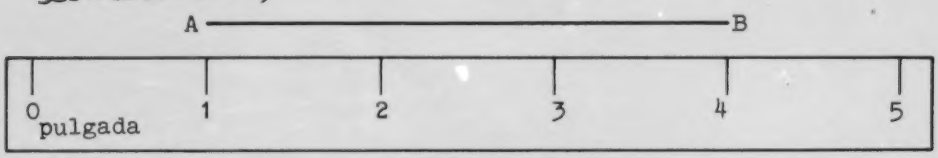
Hallamos la longitud de AB.



1. Podemos colocar nuestra escala a lo largo de $\overline{AB}$, del modo siguiente:



2. Esta es otra manera de colocar nuestra escala.
¿Por qué pondrías la regla de esta manera? (Una regla puede estar desgastada de manera que no se pueda ver bien la escala. Esto sucede, si la marca 0 está exactamente en el extremo de la regla, como en el caso de muchas reglas comerciales.)



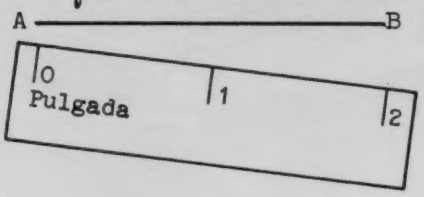
3. ¿Hay otras maneras de poner la regla para hallar la longitud de $\overline{AB}$? (Sí, colocando A en 2 o en otro punto cualquiera de la escala.)

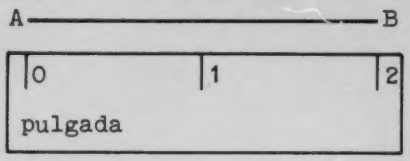
La longitud de $\overline{AB}$ es 3 pulgadas. Escribimos m $\overline{AB}$ = 3.
Leemos: La medida de $\overline{AB}$ es 3.

E479

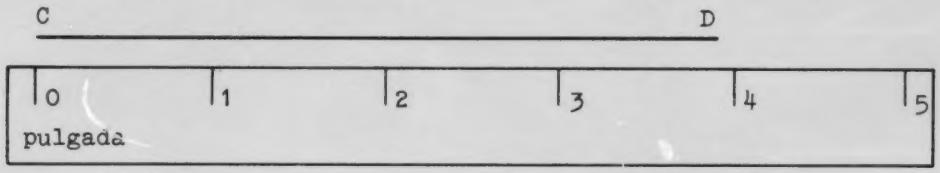
Cuando utilizaste la escala para hallar la medida de $\overline{AB}$, la utilizaste como una <u>regla</u>. Una <u>regla</u> es un borde recto con una escala marcada sobre él.

4. ¿Cuál de estos dibujos muestra la manera correcta de colocar una regla para medir un segmento? (la segunda) ¿Por qué? (los segmentos que se van a comparar tienen que colocarse uno al lado del otro.)





5. Determina la longitud de $\overline{CD}$, con la aproximación de una pulgada.



Coloca la escala a lo largo de $\overline{CD}$, como se indica en la figura.

¿Qué punto de la escala está debajo de C? (0)

¿Entre qué dos puntos de la escala está el punto D? (3 y 4)

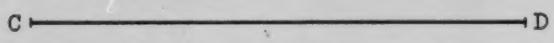
¿Está D más cerca de 3 o de 4 en la escala? (4)

¿Cuál es la longitud de $\overline{CD}$, con la aproximación de una pulgada? (4 pulgadas)

Menciona otras maneras de emplear la escala para medir $\overline{CD}$. (Colóquese 1 debajo de C o 2 debajo de C.)

E480

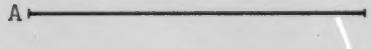
6. A continuación, se presentan varias representaciones de segmentos rectilíneos. Halla la longitud de cada segmento con la aproximación de una pulgada. Luego, halla la longitud de cada segmento con la aproximación de un centímetro. La abreviatura de "centímetro" es "cm.". Escribe tus respuestas para cada uno como se ha hecho en el primer caso.

a) 

La longitud de $\overline{CD}$ es 3 pulgadas, con la aproximación de una pulgada.
La longitud de $\overline{CD}$ es 7 centímetros, con la aproximación de un centímetro.

b)

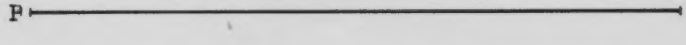
(La longitud de $\overline{EF}$ es 1 pulgada, con la aproximación de una pulgada.
La longitud de $\overline{EF}$ es 3 centímetros, con la aproximación de un centímetro.)

c) 

(La longitud de $\overline{AB}$ es 2 pulgadas, con la aproximación de una pulgada.
La longitud de $\overline{AB}$ es 5 centímetros, con la aproximación de un centímetro.)

d)

(La longitud de $\overline{XY}$ es 2 pulgadas, con la aproximación de una pulgada.
La longitud de $\overline{XY}$ es 6 centímetros, con la aproximación de un centímetro.)

e) 

(La longitud de $\overline{PR}$ es 4 pulgadas, con la aproximación de una pulgada.
La longitud de $\overline{PR}$ es 9 centímetros, con la aproximación de un centímetro.)

7. Dibuja un segmento de 8 centímetros de longitud.

8. Dibuja un segmento de 2 pulgadas de longitud.

E481

Conjunto de problemas 8

1. Halla la longitud, con la aproximación de una pulgada, de uno de tus lápices. (Hay varias respuestas posibles.)

2. Halla la longitud del mismo lápiz en centímetros. (Hay varias respuestas posibles.)

3. ¿Cuál es la longitud de $\overline{AB}$, en pulgadas? (5 pulgadas)
¿Cuál es su longitud en centímetros? (12 centímetros)

4. $\overline{CD}$ tiene 4 pulgadas de largo. ¿Cuál es su longitud en centímetros? (10 centímetros)

5. Dibuja un segmento que tenga una longitud de 5 pulgadas.

6. Dibuja un segmento cuya medida, en pulgadas, sea 4.

7. Dibuja un segmento cuya medida, en centímetros, sea 10.

8. Dibuja un segmento que tenga una longitud de 14 centímetros.

9. Copia el enunciado siguiente y escribe las palabras pulgadas y centímetros en los blancos de manera que el enunciado sea cierto:

Un segmento que mide 5 (pulgadas) de longitud es más largo que un segmento que mide 5 (centímetros) de longitud.

OTRAS UNIDADES NORMALIZADAS

Objetivo: Explicar las siguientes ideas y técnicas:

1. En el sistema angloamericano de medición lineal, 1 pie equivale a 12 pulgadas, 1 yarda equivale a 3 pies y 1 milla equivale a 5,280 pies.
2. Por conveniencia, las longitudes se expresan mediante más de una unidad, por ejemplo, 2 pies, 3 pulgadas.
3. La escala usada para medir un segmento se indica mediante la unidad menor nombrada en su longitud.
4. Para determinar la longitud combinada de dos segmentos o para determinar cuánto más largo es un segmento que otro, las medidas expresadas con la misma unidad deben sumarse o restarse.

Materiales necesarios:

Maestro: Regla de 1 pie de longitud, regla de 1 yarda de longitud

Estudiantes: Regla de cartulina, regla de 1 pie de longitud

El maestro deberá planear la práctica de esta sección cuidadosamente. Quizás, convenga pedir a los estudiantes que trabajen en la pizarra individualmente o en grupos. O, quizás, el maestro prefiera que trabajen por grupos con trozos grandes de papel. Cada alumno debe participar y efectuar las mediciones por sí mismo.

E482

OTRAS UNIDADES NORMALIZADAS

Exploración

La unidad pulgada y la unidad centímetro son muy pequeñas para medir distancias largas. Como sabes, se utilizan unidades mayores para este propósito. Tres que conoces se llaman el pie, la yarda y la milla.

Recuerda lo que sabes acerca de estos segmentos unidad.

1. Dibuja un segmento de 1 pie de largo. Dibuja un segmento de 1 yarda de largo.

2. Dibuja otros segmentos de 2 pies, 3 pies, y 4 pies de largo.

3. Mide cada uno de los segmentos en pulgadas. Indica tus resultados así:

Longitud en pies	Longitud en pulgadas
1 pie	(12) pulgadas
2 pies	(24) pulgadas
3 pies	(36) pulgadas
4 pies	(48) pulgadas

¿Cuál de estos segmentos tenía una yarda de longitud?
(3 pies ó 36 pulgadas)

4. Dibuja un segmento rectilíneo de 18 pulgadas de largo. Nómbralo $\overline{AB}$. Marca un punto C sobre $\overline{AB}$, de manera que $\overline{AC}$ mida 1 pie de largo. ¿Cuál es la longitud de $\overline{CB}$? (6 pulgadas)
La longitud de $\overline{AB}$ es 1 pie (6) pulgadas.

E483

5. Dibuja un segmento de recta de 29 pulgadas de largo. Dále el nombre $\overline{AB}$. Halla un punto C sobre $\overline{AB}$, de manera que $\overline{AC}$ mida 1 pie de largo. Determina, entonces, un punto D sobre $\overline{CB}$, de manera que $\overline{CD}$ tenga 1 pie de largo.

   ¿Cuál es la longitud de $\overline{AD}$? (2 pies o 24 pulgadas)
   ¿Cuál es la longitud de $\overline{DB}$? (5 pulgadas)
   $\overline{AB}$ mide (2) pies (5) pulgadas de largo.

6. Dibuja segmentos con las siguientes longitudes en pulgadas; luego, determina la longitud en pies y pulgadas:

Segmento	Longitud en pulgadas	Longitud en pies y pulgadas
$\overline{EF}$	15 pulgadas	(1 pie 3 pulgadas)
$\overline{GH}$	20 pulgadas	(1 pie 8 pulgadas)
$\overline{IJ}$	27 pulgadas	(2 pies 3 pulgadas)
$\overline{KL}$	30 pulgadas	(2 pies 6 pulgadas)
$\overline{MP}$	36 pulgadas	(3 pies 0 pulgadas)

7. En $\overleftrightarrow{m}$, marca $\overline{AB}$, cuya longitud es 1 pie. Luego, marca $\overline{BC}$, cuya longitud es 3 pulgadas, de manera que C no esté en $\overline{AB}$. ¿Cuál es la longitud de $\overline{AC}$ en pies y pulgadas? (1 pie 3 pulgadas) ¿Cuál es la longitud de $\overline{AC}$ en pulgadas? (15 pulgadas) (NOTA: C está en $\overleftrightarrow{AB}$, pero no en $\overline{AB}$.)

8. En $\overleftrightarrow{k}$, marca $\overline{RS}$, cuya longitud es 2 pies. Luego, marca $\overline{ST}$, cuya longitud es 7 pulgadas, de manera que T no esté en $\overline{RS}$. ¿Cuál es la longitud de $\overline{RT}$ en pies y pulgadas? (2 pies 7 pulgadas) ¿Cuál es la longitud de $\overline{RT}$ en pulgadas? (31 pulgadas)

9. Dibuja segmentos de las longitudes dadas. Luego, expresa la longitud de otra manera.

Segmento	Longitud en pies y pulgadas	Longitud en pulgadas
$\overline{AB}$	2 pies 1 pulgada	(25 pulgadas)
$\overline{CD}$	(1 pie 9 pulgadas)	21 pulgadas
$\overline{EF}$	1 pie 7 pulgadas	(19 pulgadas)
$\overline{GH}$	(2 pies 8 pulgadas)	32 pulgadas

PROBLEMAS DIFICILES

1. Una milla es una distancia de 5,280 pies. ¿Alrededor de cuántos pasos darías para caminar una milla? (Hay varias respuestas posibles.)

2. Si un automóvil corre a razón de 60 millas por hora, ¿qué distancia recorrerá en un minuto? (1 milla)
¿Cuánto tiempo emplearías en caminar una milla? (Hay varias respuestas posibles.)

3. Supongamos que alguien corrió una milla en 238 segundos. ¿Cuántos minutos y segundos tardó en recorrerla?
(3 minutos y 58 segundos)

4. Supongamos que los cuatro hombres que participaron en la carrera de relevo de una milla corrieron su "cuarto" de milla en tiempos de 36 segundos, 47 segundos, 47 segundos y 45 segundos. ¿Cuál fue el tiempo anotado para el equipo de relevo en esa carrera? (185 segundos o 3 minutos y 5 segundos)

E485

Conjunto de problemas 9

1. En cada uno de los siguientes ejercicios determina cuál de los segmentos, cuyas longitudes se indican, es el más largo:

   a) 10 pulgadas o un pie (1 pie)

   b) 4 pies o una yarda (4 pies)

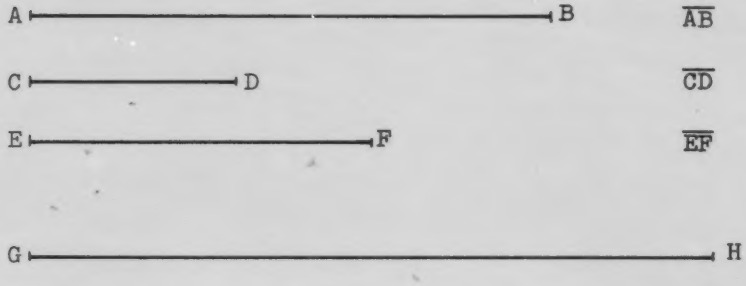
   c) 1 pulgada o un centímetro (1 pulgada)

   d) 1 pie o 10 centímetros (1 pie)

   e) 1 pie, 7 pulgadas o 2 pies (2 pies)

   f) 28 pulgadas o 2 pies (28 pulgadas)

2. Observa cada segmento y su medida; luego, escribe la unidad.



Segmento	Longitud
$\overline{AB}$	3 (pulgadas)
$\overline{CD}$	3 (centímetros)
$\overline{EF}$	5 (centímetros)
$\overline{GH}$	4 (pulgadas)

3. Completa:

	Longitud en pies y pulgadas	Longitud en pulgadas
$\overline{XY}$	3 pies 1 pulgada	(37 pulgadas)
$\overline{MN}$	(2 pies 6 pulgadas)	30 pulgadas
$\overline{DE}$	1 pie 10 pulgadas	(22 pulgadas)
$\overline{FG}$	(3 pies 8 pulgadas)	44 pulgadas

E486

4. Escribe el nombre de la unidad que hace el enunciado aceptable. Usa centímetros, pulgadas, pies, yardas o millas.

   a) El asiento de la silla del maestro está 16 (pulgadas) por encima del piso.

   b) Elena está en el cuarto grado. Su estatura es 130 (centímetros).

   c) El lago tiene 4 (millas) de largo.

   d) La estatura de un hombre alto es 2 (yardas).

   e) Un lápiz de color tiene alrededor de 10 (centímetros) de largo.

   f) Hay 2 (millas) de la casa de Roberto hasta el parque.

5. Si los segmentos tienen las siguientes longitudes, indica cuál es más largo y cuánto más largo:

	¿Cuál es más largo?	¿Cuánto más largo?
a) 23 pulgadas o 1 pie	(23 pulgadas)	(11 pulgadas)
b) 18 pulgadas o 2 pies	(2 pies)	(6 pulgadas)
c) 4 pies o una yarda	(4 pies)	(1 pie)
d) 1 pie, 8 pulgadas o 16 pulgadas	(1 pie 8 pulgadas)	(4 pulgadas)
e) 1 yarda, 4 pulgadas o 42 pulgadas	(42 pulgadas)	(2 pulgadas)
f) 1 yarda, 2 pies o 7 pies	(7 pies)	(2 pies)
g) 1 milla o 3,495 pies	(1 milla)	(1,785 pies)

6. Sabes que una milla tiene 5,280 pies. ¿A cuántas yardas equivale una milla? (1,760 yardas)

7. Un niño explorador puede caminar una milla en 12 minutos, si emplea la "marcha del Explorador". ¿Cuántas millas puede caminar en una hora? (5 millas)

E487

COMBINACION DE LONGITUDES

Cómo combinar longitudes

Exploración

1. El maestro anotó las estaturas de los niños de su clase de cuarto grado.

Alumno	Altura
Guillermo	4 pies 8
Isabel	4 pies 2
Jaime	5 pies
Elena	4 pies 6

Los niños sabían que quería decir que la estatura de Guillermo era de 4 pies y 8 pulgadas. La estatura de Isabel era de 4 pies y 2 pulgadas. La estatura de Jaime era de 5 pies y ninguna pulgada. ¿De cuántos pies y pulgadas era la estatura de Elena? (4 pies 6 pulgadas)

A menudo, utilizamos más de una unidad para expresar los tamaños.

¿Cómo utilizarías más de una unidad para medir la puerta de tu salón de clase? (Utiliza pies y pulgadas)

2. Ahora, aprenderemos cómo combinar las longitudes. Susana, Petra y Juana están decorando un salón para una fiesta. Planean poner papel crepé o rizado alrededor de las ventanas. Las niñas tienen tiras de papel con estas longitudes:

Susana	6 pies 3 pulgadas
Petra	4 pies 5 pulgadas
Juana	3 pies 2 pulgadas

a) Si unen sus tiras de papel de manera que los extremos se peguen, todo resultaría así:

La de Susana	La de Petra	La de Juana
6 pies 3 pulgadas	4 pies 5 pulgadas	3 pies 2 pulgadas

E488

Para determinar la longitud de las tiras combinadas, cambiamos todas las medidas para utilizar una sola unidad, la pulgada.

¿Cuántas pulgadas de papel tenía Susana? (75 pulgadas)

¿Cuántas pulgadas de papel tenía Petra? (53 pulgadas)

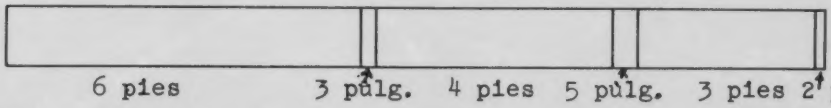
¿Cuántas pulgadas de papel tenía Juana? (38 pulgadas)

Ahora, podemos sumar las medidas: 75 + 53 + 38 = 166.

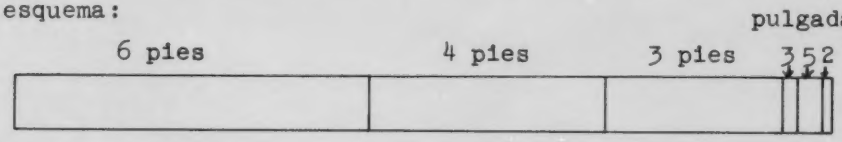
La longitud de la tira de papel era 166 pulgadas.

Expresa esta longitud en pies y pulgadas. (13 pies 10 pulgadas)

b) Podemos mostrar las tiras combinadas mediante otro esquema, así:



c) Ahora, pensemos acerca de las tiras combinadas en un orden diferente. Podemos presentar nuestra idea mediante este esquema:



La respuesta podía hallarse, sumando las medidas que van con la misma unidad.

6 + 4 + 3 = 13	6 pies	3 + 5 + 2 = 10	3 pulgadas
	4 pies		5 pulgadas
	3 pies		2 pulgadas
	13 pies		10 pulgadas

Usualmente, escribimos:

6 pies	3 pulgadas
4 pies	5 pulgadas
3 pies	2 pulgadas
13 pies	10 pulgadas

Las niñas tienen 13 pies, 10 pulgadas de papel crepé.

E489

3. ¿Cuál de las dos tiras de papel es más larga?

a) La longitud de la tira de Petra, en pulgadas: 53 pulgadas
La longitud de la tira de Juana, en pulgadas: 38 pulgadas
Las longitudes están en la misma unidad.
Restamos las medidas: 53 - 38 = n

$$\begin{array}{r} 53 \\ -\ 38 \\ \hline 15 \end{array}$$

La tira de Petra es 15 pulgadas más larga que la de Juana. ¿Cuántos pies y pulgadas es esto?
(1 pie 3 pulgadas)

b) Podemos tratar el problema de otro modo.
Restamos las medidas que van con la misma unidad.

4 - 3 = 1 4 pies 5 pulgadas 5 - 2 = 3
3 pies 2 pulgadas
1 pie 3 pulgadas

El trabajo se escribe usualmente como sigue:

4 pies 5 pulgadas
3 pies 2 pulgadas
1 pie 3 pulgadas

La longitud de la tira de Petra es 1 pie 3 pulgadas mayor que la longitud de la tira de Juana.

E490

4. Martín, Carlos y Juan tenían un concurso para ver quien podía tirar más lejos la pelota de fútbol. Observa la anotación de sus distancias.

Martín	18 yardas, 2 pies
Carlos	16 yardas, 1 pie
Juan	17 yardas, 2 pies

a) ¿Cuánto más lejos tiró Martín que Carlos? (2 yardas, 1 pie)

b) ¿Cuánto más lejos tiró Martín que Juan? (1 yarda, 0 pies)

c) ¿A cuántos pies tiró la pelota Carlos? (49 pies)

d) ¿A qué distancia se tiró la pelota en las tres pruebas? (51 yardas 5 pies o 52 yardas 2 pies)
¿Podemos sumar las tres medidas?
Podemos sumar solamente las medidas que están expresadas en la misma unidad.

18	2
16	1
17	2
51	5

La pelota de fútbol fue lanzada 51 (yardas) 5 (pies) por los muchachos.

5 pies = (1) yarda (2) pies

51 yardas
1 yarda 2 pies
52 yardas 2 pies

51 yardas, 5 pies es la misma medida que 52 yardas, 2 pies.

Conjunto de problemas 10

1. Ricardo tiene 2 lápices. Un lápiz tiene 7 pulgadas de largo y el otro tiene 5 pulgadas de largo. Cuando se ponen en la misma dirección, de modo que sus extremos se toquen, los dos lápices forman un segmento que mide (1) pie(s) (1) pulgada(s).

2. Juana tiene una cinta de 2 pies 8 pulgadas de largo; la cinta de Sara tiene 3 pies 9 pulgadas de largo.

   a) ¿Cuánto más corta es la cinta de Juana que la de Sara? (1 pie 1 pulgada)

   b) Las dos cintas, cuando se unen a lo largo, forman una cinta de (6) pies (5) pulgadas de largo.

3. Suma estas medidas. (Escribe de dos maneras las longitudes en las respuestas, como se indica en el ejercicio a).)

   a) 6 yardas 2 pies
      7 yardas 1 pie
      9 yardas 2 pies
      22 yardas 5 pies = 23 yardas 2 pies

   b) 23 pies 8 pulgadas
      35 pies 2 pulgadas
      46 pies 10 pulgadas
      (104 pies 20 pulgadas = 105 pies 8 pulgadas)

   c) 38 yardas 2 pies
      23 yardas 2 pies
      66 yardas 2 pies
      (127 yardas 6 pies = 129 yardas 0 pies)

   d) 11 yardas 2 pies
      37 yardas 1 pie
      9 yardas 2 pies
      (57 yardas 5 pies = 58 yardas 2 pies)

   e) 24 pies 2 pulgadas
      75 pies 6 pulgadas
      67 pies 6 pulgadas
      (166 pies 14 pulgadas = 167 pies 2 pulgadas)

   f) 8 pulgadas
      5 pulgadas
      4 pulgadas
      (17 pulgadas = 1 pie 5 pulgadas)

4. Resta estas medidas:

a) 5 yardas 2 pies
2 yardas 1 pie
(3 yardas 1 pie)

b) 37 pies 11 pulgadas
18 pies 8 pulgadas
(15 pies 3 pulgadas)

c) 33 yardas 2 pies
8 yardas 2 pies
(25 yardas 0 pies)

d) 26 pies 9 pulgadas
9 pies 4 pulgadas
(17 pies 5 pulgadas)

5. He aquí los nombres y estaturas (en pulgadas) de 30 alumnos de un salón de clase:

COLUMNAS

FILAS						
	Juan 56	María 54	Juana 53	Raúl 63	Tomás 52	(278)
	Diana 53	Pablo 61	José 63	Felipe 52	Helena 52	(281)
	Fello 55	Fred 59	Marta 54	Víctor 61	Violeta 60	(289)
	Carlos 52	Guillo 52	Laura 61	Gabriel 56	Braulio 65	(286)
	Sara 52	Gregorio 52	Valentina 63	Julio 56	Genaro 65	(288)
	Edna 52	Toño 54	Jaime 52	Horacio 65	Josefina 64	(287)
	(320)	(332)	(346)	(353)	(358)	

a) ¿En cuál de las filas es mayor la suma de las estaturas de los alumnos? (En la tercera fila)
¿Cuánto es esta suma? (289 pulgadas o 24 pies 1 pulgada)

b) ¿En cuál de las columnas es mayor la suma de las estaturas? (En la quinta columna)
¿Cuánto es esa suma? (358 pulgadas o 29 pies 10 pulgadas)

c) ¿Hay algún alumno que está tanto en la fila como en la columna donde la suma de las estaturas es mayor? (Sí)
¿Quién? (Violeta)

E493

6. Utiliza la tabla del ejercicio 6 para contestar las siguientes preguntas:

a) ¿En qué columna es menor la suma de las estaturas? (En la primera columna)

¿Cuánto es esta suma? (350 pulgadas o 26 pies 8 pulgadas)

b) ¿En qué fila es menor la suma de las estaturas? (En la primera fila)

¿Cuánto es esta suma? (278 pulgadas o 23 pies 2 pulgadas)

c) ¿Hay algún alumno que esté tanto en la fila como en la columna donde la suma de las estaturas es la menor? (Sí) ¿Quién? (Juan)

PERIMETRO

Objetivo: Explicar las siguientes ideas y técnicas:

1. Una curva cerrada simple puede medirse, "estirando" un modelo de alambre de la curva y determinando la longitud del mismo.
2. Una curva cerrada simple que es la reunión de varios segmentos rectilíneos es un polígono.
3. El perímetro de un polígono es la longitud del polígono.
4. El perímetro de un polígono puede determinarse, sumando las medidas de los lados, si las medidas están expresadas en términos de las mismas unidades lineales.

Materiales necesarios:

Maestro: Alambre, regla, tijeras

Estudiantes: Trozo de alambre de 15 pulgadas de largo, regla, otro trozo de alambre aproximadamente de 20 pulgadas, tijeras

Vocabulario: Perímetro

En esta sección, los alumnos medirán una curva cerrada simple representada, curvando un alambre, que luego enderezan y, finalmente, miden para determinar la longitud de la curva. El perímetro se define como la longitud de un polígono. La Exploración y el Conjunto de problemas que se presentan más adelante deberán conducir a reglas acerca de la manera de calcular perímetros.

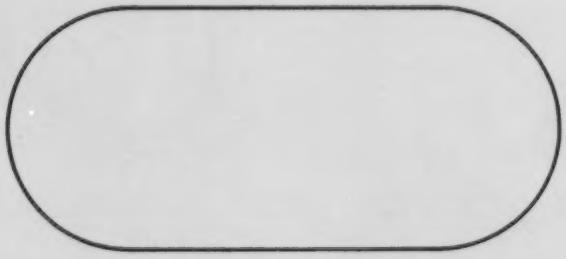
E494

PERIMETRO

Longitudes de curvas cerradas simples

Exploración

1. Toma un pedazo de alambre de 15 pulgadas de largo. Dóblalo para formar una curva cerrada simple, como ésta:



¿Cuál es la longitud del alambre, cuando está doblado en la forma de esta curva? (15 pulgadas)

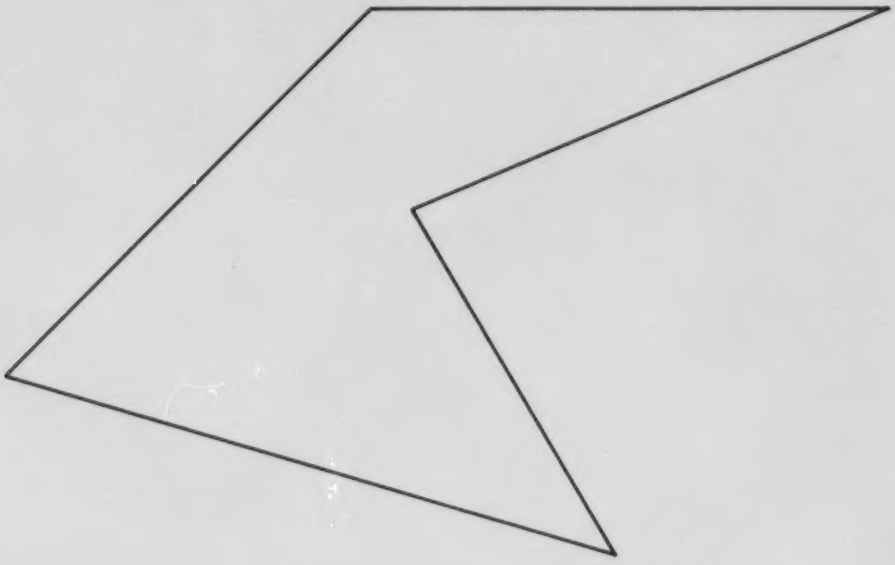
2. Estira el alambre y dóblalo para formar una curva cerrada diferente.

¿Cuál es el largo de la nueva curva? (15 pulgadas)

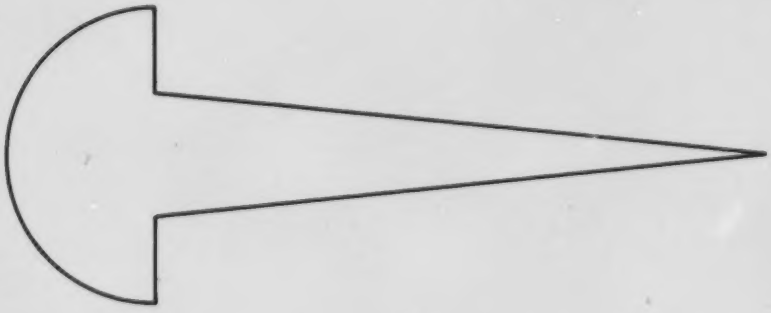
¿Qué sucede con la longitud del alambre, cuando cambias la forma de la curva cerrada simple? (La longitud del alambre es siempre la misma.)

E495

3. Estira tu alambre.
¿Puedes usarlo para hallar la longitud de la curva dibujada a continuación? (sí, 15 pulgadas)



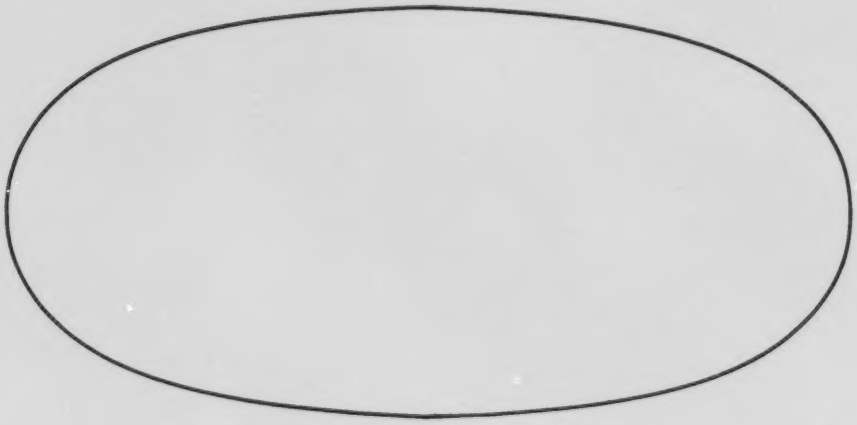
4. ¿Es la longitud de la siguiente curva mayor o menor que 15 pulgadas? (menor que 15 pulgadas)



¿Cuánto menor que 15 pulgadas? (alrededor de 3 pulgadas)
¿Usaste tu regla para medir la longitud del alambre que sobró después que doblaste el pedazo de alambre para ajustarlo a la curva ilustrada arriba? (sí)

E496

5. Toma otro pedazo de alambre cuya longitud no conoces. Dóblalo de manera que se ajuste a la curva dibujada a continuación. Si sobra alambre, dóblalo hacia atrás de modo que no interfiera con la curva.



¿Puedes pensar en algún modo de usar el contorno de alambre para hallar la longitud de la curva? (Estiramos el alambre y, después, lo medimos con una regla.) Si estiras el alambre, ¿cambiará la longitud de la parte del alambre que contorneó la curva? (no)

Estira el alambre.

Mídelo con una regla.

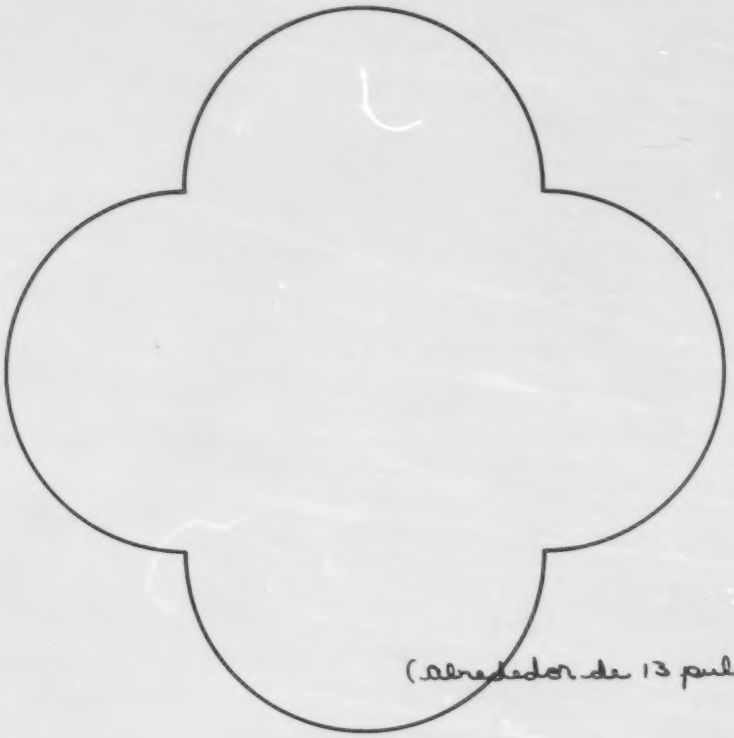
¿Cuál es la longitud de la curva? (alrededor de 12 pulgadas)

E497

Conjunto de problemas 11

Usa pedazos de alambre y una regla para hallar las longitudes de las curvas:

1.



(alrededor de 13 pulgadas)

2.

(alrededor de 10 pulgadas)

Recuerda que esta curva cerrada simple se llama un polígono, porque es la reunión de segmentos rectilíneos.

E498

3. Toma un pedazo de alambre. Utilizando todo el alambre, dóblalo de manera que se forme un triángulo equilátero. ¿Cuál es la longitud del triángulo? (Es la misma que la longitud del pedazo de alambre con el cual se formó.)

4. Dobla un pedazo de alambre de manera que, utilizándolo todo, resulte un polígono con cuatro lados de la misma longitud. Halla la longitud del polígono. (La longitud del polígono será la misma longitud que la del pedazo de alambre con el cual se formó.)

5. Usa el mismo pedazo de alambre que en el ejercicio 4 y haz un polígono diferente con cuatro lados de la misma longitud. Sin estirar el alambre, ¿conoces la longitud de este polígono? (Es la misma que la longitud del polígono del ejercicio 4.)

6. Halla un modelo de una circunferencia en tu casa. Usa un pedazo de alambre o un pedazo de cuerda para hallar la longitud de la circunferencia.

   ¿Necesitaste una regla? (Sí)

7. Recorta un modelo de triángulo con su interior, de un pedazo de cartón.

   ¿Puedes hallar la longitud del triángulo? (Sí)

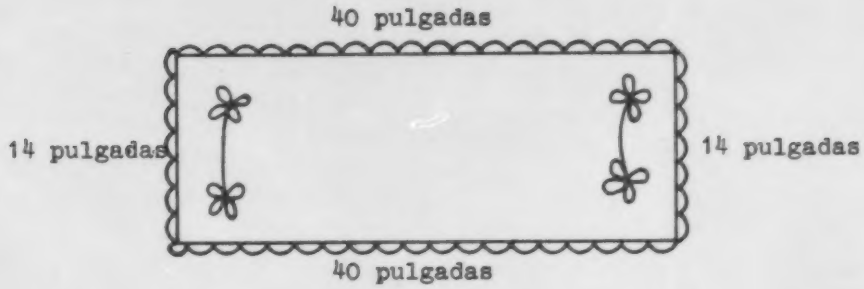
   ¿Usaste un pedazo de alambre? (Sí o no)

   ¿Pudiste haber hallado la longitud del triángulo, utilizando solamente la regla? (Sí)

E499

PERIMETROS DE POLIGONOS

Exploración



1. Juana deseaba comprar alguna puntilla para adornar una banda. La banda tenía 40 pulgadas de largo y 14 pulgadas de ancho. ¿Cuánta puntilla necesita Juana?

   El enunciado numérico que dice la medida de la longitud de puntilla que Juana necesita para adornar los cuatro bordes de la banda es:

   $$40 + 14 + 40 + 14 = 108$$

   La longitud de puntilla que Juana debe comprar es 108 pulgadas.

   ¿Cuántas yardas de puntilla necesita? (3 yardas)

   El perímetro del rectángulo en este ejemplo es 108 pulgadas.

Has hallado la longitud de muchas curvas cerradas simples.

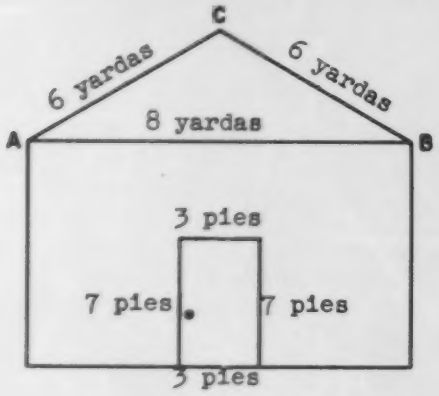
Cuando la curva es un polígono cuyos lados son segmentos rectilíneos, llamamos a la longitud del polígono su perímetro.

El perímetro consiste en un número y una unidad de medida.

2. La familia Juárez decidió decorar la fachada de su casa para la temporada de Navidad.

   Juan deseaba poner una hilera de luces de colores en la casa a lo largo del triángulo ABC. María deseaba poner una hilera de luces de colores alrededor de la puerta.

   El Sr. Juárez dijo que compraría luces para la puerta o el techo, pero no compraría luces para ambos. Además, decoraría la que requiriera la hilera más corta de luces.



   Juan midió los tres lados del triángulo.

   María midió los cuatro lados del rectángulo alrededor de la puerta.

   Cada uno informó que la suma de las medidas de los lados de la figura que había medido era 20.

   Juan dijo: "6 + 5 + 8 = 20"

   María dijo: "3 + 7 + 3 + 7 = 20"

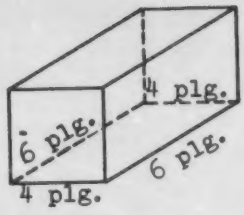
¿Qué otro dato necesitaba conocer el Sr. Juárez, antes de que pudiera tomar una decisión acerca de qué parte de la casa iba a decorar? (La unidad de medida)

¿Decoró la familia Juárez la puerta o el techo? (La puerta)

E501

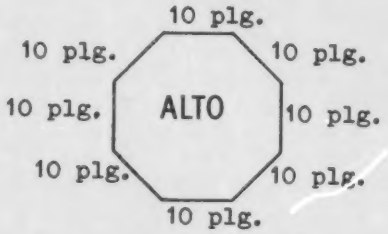
Conjunto de problemas 12

1. José hizo un modelo de cartón de una caja de tiza. Deseaba pegar los bordes del fondo de la caja con papel engomado. ¿Cuánto papel engomado necesitó? (20 pulgadas)



¿Forman un rectángulo los bordes del fondo? (Sí)
¿Hallaste el perímetro del rectángulo? (Sí)

2. El departamente de policía de un pueblo está pintando una orla negra estrecha, siguiendo el borde de las señales PARE. ¿Cuántas pulgadas de orla deben pintarse en cada señal? (80 pulgadas)

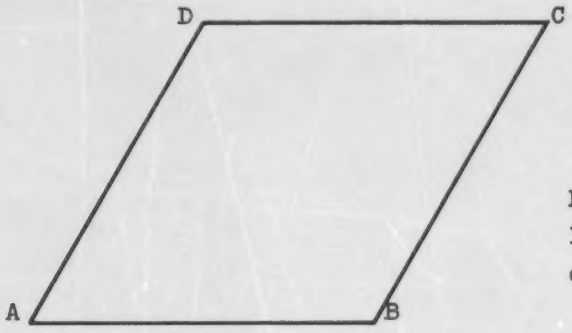


El borde de la señal PARE representa un polígono.
¿Cuál es el perímetro de este polígono? (80 pulgadas)

E502

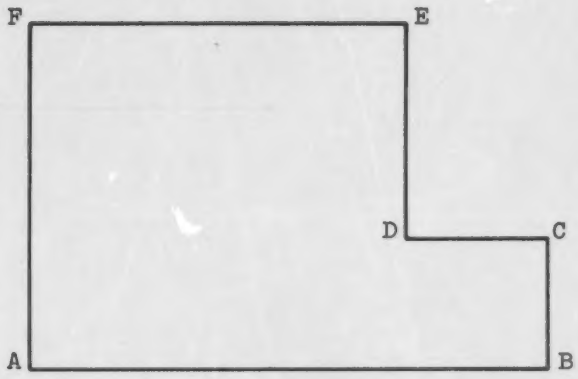
3. Usa tu regla para hallar, con la aproximación de una pulgada, las medidas que necesitas para determinar el perímetro de cada polígono.

a)



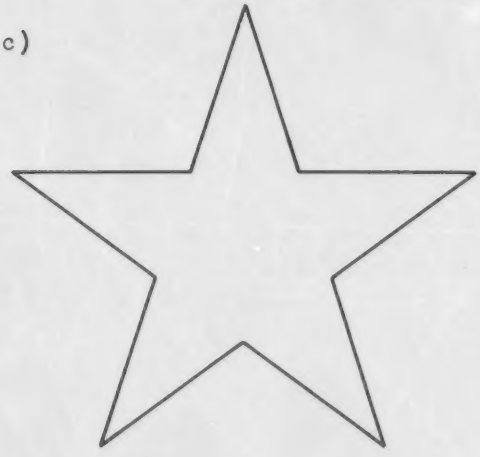
El perímetro de la figura ABCD es (8 pulgadas).

b)



El perímetro de la figura ABCDEF es (10 pulgadas).

c)



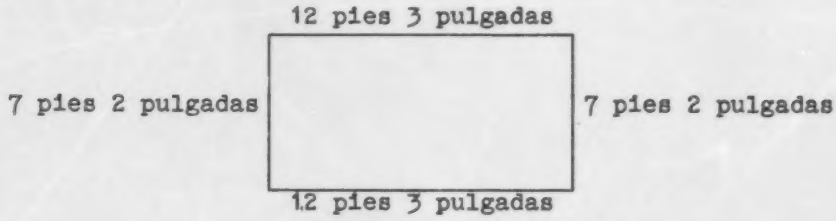
El perímetro de la estrella es (10 pulgadas).

E503

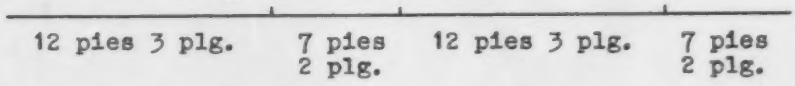
DETERMINACION DE PERIMETROS

Exploración

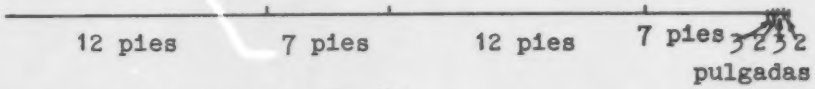
He aquí un plano para el piso de un cuarto rectangular.
¿Cuál es el perímetro del borde del piso?



Si ajustamos un alambre a todo lo largo del borde de este plano del piso y, luego, estiramos el alambre, podemos representar el alambre así:



Imagínate que cortamos el alambre en ocho pedazos.
Los ponemos juntos otra vez, como se muestra en esta figura.



¿Ha cambiado la longitud? (no)
Sumamos las medidas que tienen la misma unidad.

$$12 + 7 + 12 + 7 = 38$$

$$3 + 2 + 3 + 2 = 10$$

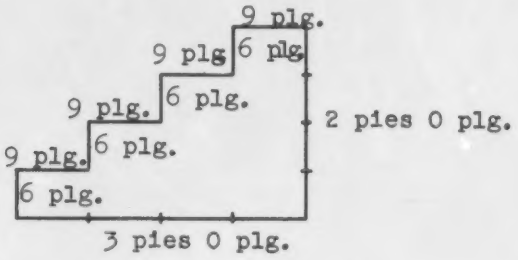
La longitud, o el perímetro, del rectángulo es 38 pies 10 pulgadas. Recuerda que hemos sumado las medidas. No sumamos las unidades. Sumamos solamente aquellas medidas que se obtuvieron, utilizando la misma unidad.

Conjunto de problemas 13

1. Determina el perímetro de un solar en forma de un triángulo, si las longitudes de sus lados son 50 pies 4 pulgadas, 60 pies 7 pulgadas y 50 pies 4 pulgadas.
   (181 pies 3 pulgadas ó 60 yardas 1 pie 3 pulgadas)

2. Una yarda de medir tiene 1 pulgada de ancho. Halla el perímetro de la cara de la yarda de medir que muestra la escala. Expresa tu respuesta en yardas y pulgadas.
   (2 yardas 2 pulgadas)
   Expresa también tu respuesta en pies y pulgadas.
   (6 pies 2 pulgadas)

3. Determina el perímetro del polígono ilustrado a continuación:

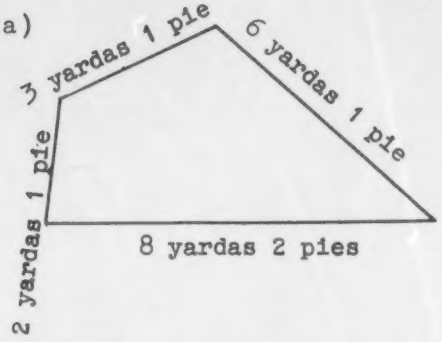


   a) ¿Puedes escribir tu respuesta usando solamente una unidad? (sí) Escribe tu respuesta en pulgadas solamente; (120 pulgadas) en pies solamente. (10 pies)
   b) ¿Puedes escribir tu respuesta usando yardas solamente y lo que hemos aprendido hasta ahora? (no)

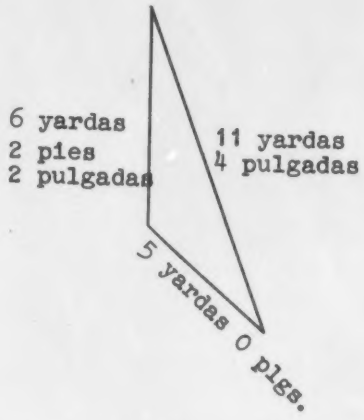
4. En Francia, un diamante de béisbol es un cuadrado, cada uno de cuyos lados tiene 27 metros 70 centímetros de largo. Pedro batea un jonrón. ¿Cuál es la longitud del camino más corto que puede seguir, si toca cada base en su regreso al punto de partida? (110 metros 80 centímetros)
Necesitarás saber que 100 centímetros equivalen a 1 metro.

5. ¿Qué curva es más larga? (Curva b) ¿Cuánto más larga? (1 yarda 2 pies 6 pulgadas)

a)



b)



PROBLEMAS DIFICILES

6. Un hombre desea poner una cerca alrededor de todo su terreno. Sabe que el lindero de su terreno se puede considerar como un cuadrado. Mide un lado y halla que mide entre 125 y 126 pies de largo. ¿Cuánta cerca deberá comprar? (4 × 126 = 504 pies)

7. En la casa de Jaime, se rompió un cristal de una ventana. Su padre midió el marco donde estaba colocado el cristal. Encontró que era un rectángulo con lados de 14 pulgadas y 24 pulgadas, con la aproximación de una pulgada. Compró un nuevo cristal de 14 pulgadas de ancho y 24 pulgadas de largo. Cuando fue a colocarlo en el marco, encontró que era demasiado largo para encajar bien. ¿Puedes dar una posible razón? (El marco medía un poco menos de 24 pulgadas de largo. El padre de Jaime debió procurar comprar un trozo de cristal que no fuera mayor que el espacio en el marco.)

Capítulo 10

EL CONCEPTO DE NUMERO RACIONAL

PROPOSITO DE LA UNIDAD

Es posible que los alumnos tengan alguna noción de lo que son números racionales. Indudablemente, ellos y muchos maestros han llamado los números como $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{8}$, etc., fracciones o números fraccionarios. En este capítulo, designaremos como los números racionales a estos números indicados por pares de números cardinales (siendo el segundo número de cada par distinto de cero). En realidad, nos ocuparemos solamente de un subconjunto de los números racionales; un conjunto al que nos referimos algunas veces como los números racionales de la aritmética. Esta clase de números los sugiere la medición.

Más concretamente, queremos, en este capítulo, continuar el desarrollo del concepto de número racional, de manera que se cumplan los siguientes objetivos:

1. Destacar los aspectos comunes a las cuestiones que implican medición, observando que la descomposición de segmentos unidad y regiones en partes congruentes y de conjuntos de objetos en subconjuntos equivalentes proporciona modelos apropiados de los números racionales.

2. Explicar un procedimiento de nombrar números racionales, utilizando símbolos llamados fracciones y formas mixtas. (Las formas mixtas consisten en el numeral de un número cardinal y una fracción. Por ejemplo, $4\frac{2}{5}$ y $2\frac{1}{2}$ son formas mixtas. Antiguamente, se conocían estos numerales como "números mixtos". En el quinto grado, utilizaremos otro tipo de numeral, los decimales.)
3. Ayudar a los estudiantes a aprender que numerales distintos pueden indicar el mismo número racional.
4. Ayudar a los estudiantes a aprender que el conjunto de los números cardinales es un subconjunto del conjunto de los números racionales.

Una nota para el maestro

La terminología empleada en este capítulo y en los capítulos que tratan acerca de los números racionales en los libros de matemática más avanzados del SMSG para la escuela elemental, asociará las siguientes palabras con las siguientes ideas:

1. número racional - un conjunto infinito de pares ordenados de números racionales, cuyos segundos miembros no son cero.

   Cualquier miembro de un conjunto particular de pares ordenados puede utilizarse para indicar un número racional particular.

2. fracción - un símbolo que representa un número racional. Los símbolos $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{9}{5}$ y $\frac{150}{10}$ son fracciones. Todos los miembros del conjunto de fracciones $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{3}{6}, \ldots\}$ representan el mismo número racional. Podemos escribir $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, etc. Cada fracción se determina por un par ordenado de números. El primer número del par se llama el numerador y representa el número de partes congruentes que se consideran. El segundo número del par se llama el denominador y representa el número de partes congruentes en que se descompone una unidad (región, segmento).

3. decimal - un símbolo que puede representar un número racional, cuando el segundo miembro del par es 10 o una potencia de 10, es decir, 100 ó 10^2, 1000 ó 10^3, etc. El segundo miembro, o sea, el denominador, puede denotarse mediante el valor de posición.

4. forma mixta - un símbolo que es una "combinación" de un numeral de un número cardinal y una fracción. Sin duda, el maestro lo conocerá por el nombre de "número mixto", pero, desde luego, los números no pueden ser mixtos.

BASE MATEMATICA

Introducción

En sus estudios de matemática en la escuela elemental, un niño aprende a utilizar varios conjuntos de números. El primero de estos conjuntos es el conjunto de los números naturales, 1, 2, 3, 4, ... El segundo es el conjunto de los números cardinales 0, 1, 2, 3, 4, ... También, el niño aprende ciertas propiedades de los números cardinales.

Durante los grados del primero al sexto se amplía la idea de "número", de manera que al final del sexto grado, el niño reconoce cada uno de los siguientes símbolos como un nombre de un número:

$$\frac{4}{3},\ \frac{1}{2},\ 3.6,\ 2\frac{1}{2},\ 8,\ 0,\ \frac{5}{5},\ \frac{6}{2},\ 0.01.$$

En el lenguaje tradicional, podríamos decir que cuando el niño ha completado los primeros seis años de la matemática escolar, ya tiene algunos conocimientos acerca de "los números cardinales, las fracciones, los decimales y los números mixtos". Ese lenguaje es primordialmente lenguaje numeral. Obscurece la idea de que un mismo <u>número</u> puede tener varias clases de nombres. "Las fracciones, los decimales y los números mixtos" son clases de <u>nombres</u> para números y no diferentes clases de números. Si cortamos un pedazo de cinta de $1\frac{1}{2}$ pulgadas, 1.5 pulgadas, o $\frac{3}{2}$ pulgadas de longitud, la cinta es la misma, no importa el <u>numeral</u> que se elija. Es decir, $1\frac{1}{2}$, 1.5 y $\frac{3}{2}$ son nombres para el mismo <u>número</u>. Este número es un miembro de un conjunto de números algunas veces llamados números no negativos o números racionales de la aritmética. Para nuestros propósitos aquí, los llamaremos números racionales, teniendo en cuenta que se trata solamente de un subconjunto del conjunto de todos los números racionales. También, deberá tenerse en cuenta que dentro del conjunto de los números racionales hay un conjunto que corresponde al conjunto de los números cardinales. Por ejemplo, 0, 3, 7, son todos números racionales que son también números cardinales. Los números $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{4}$ y 0.2 son números racionales que no son números cardinales.

Las primeras ideas acerca de los números racionales

Los niños adquieren las primeras ideas acerca de los números racionales tratando con regiones: regiones rectangulares, regiones circulares, regiones triangulares, etc. En las figuras A, B y C, se utilizaron regiones rectangulares. Para cualquier clase de región, debemos primero determinar una región unidad. En las figuras A, B y C, la región unidad es una región cuadrada.

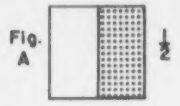
En las figuras A y B, vemos que:

(1) La región unidad se dividió en un número de regiones congruentes.

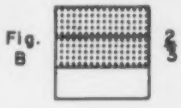
(2) Se sombrearon algunas de las regiones.

(a) Uso de regiones. Veamos cómo los niños utilizan las regiones para desarrollar sus primeras ideas acerca de los números racionales. En casos sencillos, el niño aprende a asociar un número como $\frac{1}{2}$ ó $\frac{2}{3}$ con una parte sombreada de la figura. (Los números racionales se pueden asociar también con las partes no sombreadas.)

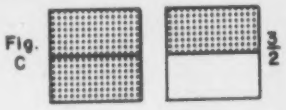
Utilizando dos o más regiones congruentes (figura C), el niño puede dividir cada una en el mismo número de partes congruentes y sombrear algunas de esas partes. De nuevo, puede asociar un número con la región sombreada resultante.



El cuadrado unidad se dividió en 2 regiones congruentes. 1 se sombreó.



El cuadrado unidad se dividió en 3 regiones congruentes. 2 se sombrearon.



Cada cuadrado unidad se dividió en 2 regiones congruentes. 3 se sombrearon. Tenemos $\frac{3}{2}$ de un cuadrado unidad.

En este momento, el niño está solamente en los comienzos de su concepto de los números racionales. Sin embargo, observemos lo que se hace cuando introducimos, por ejemplo, $\frac{2}{3}$. Dividimos

la región unidad en 3 partes congruentes. Después, sombreamos 2 de esas partes. Análogamente, en $\frac{3}{2}$, dividimos cada región (unidad) en 2 regiones congruentes, y sombreamos 3 de sus partes. Al utilizar regiones para representar un número como $\frac{3}{2}$, debemos recalcar que pensamos en $\frac{3}{2}$ de una región unidad, como en la figura C.

(b) Uso de la recta numérica. Los pasos efectuados con regiones pueden llevarse a cabo sobre la recta numérica. Es fácil comprender que es muy práctico hacerlo. Si tenemos una regla marcada con pulgadas solamente, no podemos hacer ciertos tipos de mediciones útiles. Necesitamos tener puntos marcados dentro de los intervalos unidad, y nos convendría tener números asociados con estos puntos.

El método de marcar nuevos puntos en la regla es análogo al utilizado con regiones. Dividimos cada segmento unidad en partes congruentes. Contamos esas partes. Así, para marcar el punto que corresponde a $\frac{2}{3}$, tenemos que dividir el segmento unidad en 3 partes congruentes. Entonces, contamos 2 de ellas (figura D). Si dividimos cada intervalo unidad en 2 partes congruentes y contamos 3 de ellas, situamos el punto que asociaríamos con $\frac{3}{2}$ (figura E).

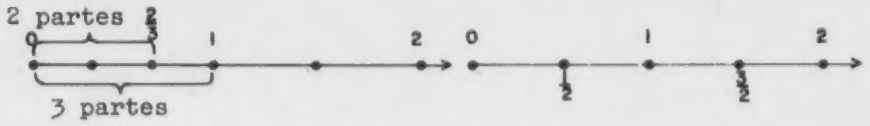


Figura D

Figura E

Teniendo en cuenta esta construcción, veremos que todos los números como $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{11}{8}$ pueden asociarse con números particulares de la recta numérica. Por ejemplo, para marcar $\frac{11}{8}$, dividimos los segmentos unidad en 8 segmentos congruentes (figura F).

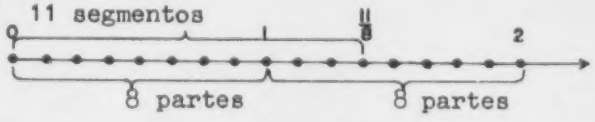


Figura F

(c) Numerales para pares de números. Supóngase que consideramos un par de números naturales como 11 y 8, donde 11 es el primer número y 8 es el segundo. Podemos construir un símbolo, escribiendo el nombre del primer número del par encima de una raya y el del segundo número debajo de la misma. Así, el símbolo para representar el par de números 11 y 8 sería $\frac{11}{8}$. Si hubiéramos considerado el 8 como el primer número del par y el 11 como el segundo, diríamos el par 8 y 11 y el símbolo utilizado habría sido $\frac{8}{11}$. Para los números 3 y 4, el símbolo sería $\frac{3}{4}$. Para los números 4 y 3, el símbolo sería $\frac{4}{3}$.

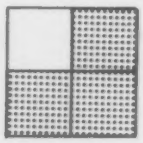
Con el tipo de símbolos descritos en el párrafo anterior, podemos asociar puntos de la recta numérica. El segundo número indica en cuántos segmentos congruentes se ha de descomponer cada segmento unidad. El primer número indica cuántos de esos segmentos se han de contar.

También, podemos asociar cada uno de los símbolos con una región sombreada como en las figuras A, B y C. El segundo número nos dice en cuántas partes congruentes debemos descomponer cada región unidad. El primer número nos dice cuántas de esas partes se han de sombrear.

A los niños, les es más fácil ver las regiones y trabajar con ellas que con segmentos. Sin embargo, la recta numérica tiene una gran ventaja. Por ejemplo, asociamos un número como $\frac{3}{4}$ con un solo punto de la recta numérica. También, la recta numérica da una representación no ambigua de los números como $\frac{3}{2}$ y $\frac{7}{2}$. Una región que corresponde a $\frac{3}{4}$ está definida con menos precisión en cuanto a que regiones con la misma medida no son necesariamente idénticas ni aún congruentes.

En la figura G, podemos ver que cada región sombreada es $\frac{3}{4}$ de la región unidad. Darse cuenta de que ambas regiones sombreadas miden $\frac{3}{4}$ unidades cuadradas es, en efecto, una parte del concepto de área.

Cuadrado unidad



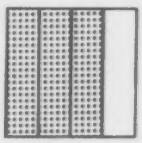


Figura G

Cuando asociamos números con puntos de la recta numérica, tratamos con segmentos que empiezan en 0. Por esta razón, aun cuando la recta numérica es menos intuitiva para los niños, es conveniente utilizarla lo más pronto posible.

Significado de número racional

Los diagramas (a), (b) y (c) de la figura H muestran una recta sobre la cual se marcaron puntos correspondientes a $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, etc., una recta numérica sobre la cual se marcan puntos correspondientes a $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, etc., y otra con puntos correspondientes a $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, etc. Al examinar esas rectas, vemos que parece natural considerar a $\frac{0}{2}$ asociado con el punto 0. En realidad, contamos, por decirlo así, 0 segmentos. De igual modo, parece natural marcar $\frac{0}{4}$ y $\frac{0}{8}$ como se ha indicado.

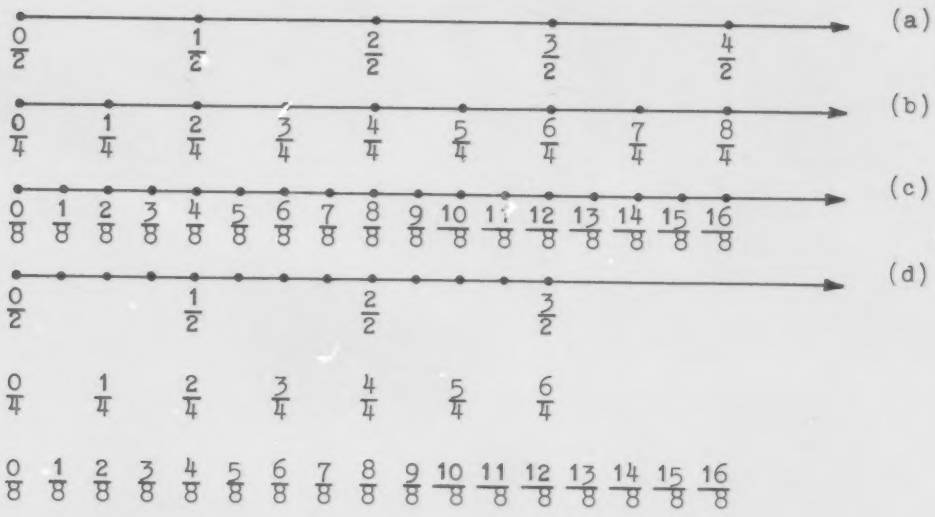


Figura H

Ahora, juntamos los diagramas (a), (b) y (c). Es decir, en una sola recta (d), llevemos a cabo el proceso de marcar todos los puntos.

Al hacer esto, vemos que $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ y $\frac{4}{8}$ se asocian todos con el mismo punto. De igual manera, $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ se asocian con el mismo punto.

Ahora, estamos en disposición de explicar con mayor precisión lo que entendemos por fracción y por número racional. Convengamos en llamar fracciones a los símbolos que hemos venido utilizando. Entonces, una fracción es un símbolo asociado con un par de números. El primer número del par se llama el numerador y el segundo número se llama el denominador. Hasta aquí, hemos utilizado solamente fracciones en las que el numerador del par de números es un número cardinal (0, 1, 2, ...), y el denominador es un número natural (1, 2, 3, ...).

Cada fracción puede utilizarse para marcar un punto de la recta numérica. A cada punto marcado con una fracción, corresponde un número racional. Así, pues, una fracción es un nombre de un número racional. Por ejemplo, si se nos da la fracción $\frac{3}{10}$, podemos localizar el punto que le corresponde en la recta numérica. $\frac{3}{10}$ es el nombre del número racional asociado con ese punto. Sin embargo, el punto también se puede localizar mediante otras fracciones como $\frac{6}{20}$ y $\frac{9}{30}$. Así, $\frac{6}{20}$ y $\frac{9}{30}$ también son nombres para el número racional representado por $\frac{3}{10}$, puesto que están asociados con el mismo punto. Entonces, los números racionales se denotan por fracciones del tipo que hemos estudiado. A cada punto de la recta numérica que puede marcarse con una fracción, le corresponde un número racional no negativo.

Algún niño sobresaliente puede preguntarse si todo punto de la recta numérica puede marcarse con una fracción del tipo que describimos. La respuesta es "NO". Hay números, π y $\sqrt{2}$ son dos de ellos, que no pueden representarse mediante fracciones del tipo que describimos. El estudio de tales números, llamados números irracionales, se dejará para los grados séptimo y octavo.

Los números cardinales considerados como números racionales

Nuestro método de asociar fracciones con puntos de la recta numérica puede utilizarse con las siguientes fracciones: $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, etc.

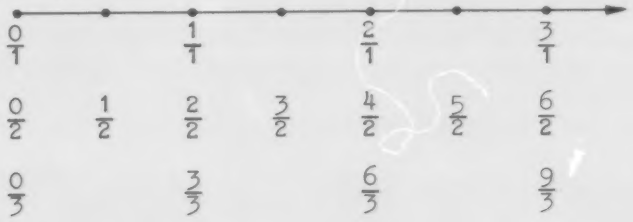


Figura I

En la recta numérica de la figura I, vemos que asociamos $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$ con el mismo punto. Observamos que este mismo punto corresponde al número natural 1. Así, el mismo punto corresponde

(1) al número natural 1

(2) al número racional representado por $\frac{1}{1}$.

Parece, pues, conveniente utilizar el símbolo 1 como otro nombre más para el número racional que se representa por $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, etc. Esto nos permitiría escribir $1 = \frac{2}{2}$, por ejemplo. De igual modo, consideraríamos a 5 como otro nombre para el número representado por $\frac{5}{1}$, $\frac{10}{2}$, etc.

En este momento, debemos tener cuidado con lo que pensamos. No es ilógico utilizar el símbolo que prefiramos como un numeral. Sin embargo, tropezamos con dificultades cuando un mismo símbolo tiene dos significados, porque, entonces, corremos el peligro de que parezcan contradicciones. Por ejemplo, cuando pensamos en 2, 3 y 6 como números naturales, acostumbramos escribir $2 \times 3 = 6$. Eventualmente, definiríamos el producto de dos números racionales y encontraríamos serias dificultades, si el producto de los números racionales representados por 2 y 3 fuera cualquier otra cosa, excepto el número racional representado por 6.

Sin embargo, utilizar 0, 1, 2, 3, etc., como nombres de números racionales nunca nos conduce a contradicción alguna. Para todos los propósitos de la aritmética, es decir, para determinar sumas, productos, etc., y para la comparación de tamaños, tenemos nombres para números cardinales o nombres para números racionales. En lenguaje matemático más preciso, podemos decir que el conjunto de los números racionales contiene un subconjunto—los números representados por $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, etc.,—que es isomorfo al conjunto de los números cardinales, es decir, $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$, etc., se comportan exactamente como los números cardinales, 0, 1, etc.

Resultaría demasiado ambicioso tratar de formular de manera precisa la idea de isomorfismo en este momento. Para nuestros propósitos, basta considerar a 0, 1, 2, etc., como nombres para números racionales. Sin embargo, es conveniente observar,

respecto a las operaciones con números racionales, que al calcular con números como $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, obtenemos resultados ya conocidos por la experiencia con los números cardinales.

Identificación de fracciones que representan el mismo número racional

Al escribir $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, decimos que "$\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$ son nombres del mismo número".

(a) Uso de modelos reales. La validez del enunciado $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ puede justificarse mediante un experimento concreto. Por ejemplo, en la figura J, primero dividimos la región unidad en dos regiones congruentes. Después, dividimos cada una de esas partes en 3 regiones congruentes, como indica el segundo dibujo. De manera que el segundo cuadrado unidad queda dividido en 2×3, es decir, 6 partes. Sombrear 1 parte del primer dibujo equivale a sombrear 1×3, o sea, 3 partes del segundo. Así, nos damos cuenta de que $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{1 \times 3}$.

Sombreo de $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$ de una región

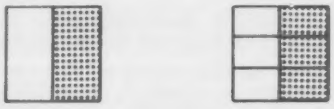


Figura J

Una vez más, nuestro estudio de regiones sigue una pauta que puede aplicarse a la recta numérica. Consideremos las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{8}$.

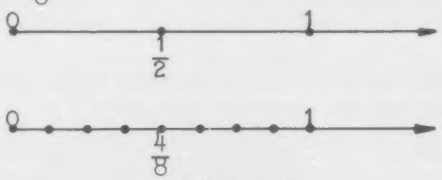


Figura k

Al marcar $\frac{1}{2}$ en la recta numérica (figura K), dividimos el intervalo unidad en 2 segmentos congruentes. Al marcar $\frac{4}{8}$, lo dividimos en 8 segmentos congruentes. Podemos hacerlo

primero dividiendo el intervalo en 2 partes y, después, dividiendo cada una de las partes en 4 segmentos. Este proceso produce (2×4) segmentos congruentes. Tomar 1 de 2 partes congruentes nos conduce al mismo punto que tomar 4 de 8 partes congruentes:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4}$$

Con otras palabras, cuando multiplicamos el numerador y el denominador de $\frac{1}{2}$ por el mismo número natural, podemos representar el resultado usando la recta numérica. Hemos subdividido el intervalo $\frac{1}{2}$ en un número de partes congruentes.

Después de tratar este proceso varias veces, los estudiantes podrán hacer un dibujo para explicar este tipo de relación. Por ejemplo, en la figura L, se da $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2}$, representado mediante regiones y mediante la recta numérica.

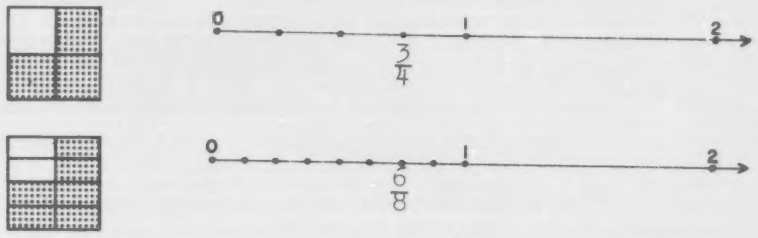


Figura L

Cada cuarta parte (de una región o de un intervalo) se subdividió en 2 partes congruentes; por tanto, $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2}$.

(b) Uso de numeradores y denominadores. Al examinar dos fracciones que representan el mismo número, quizás, sorprenda que destaquemos la multiplicación del numerador y del denominador por el mismo número natural. Generalmente, procuramos determinar la fracción más simple para representar el número. Entonces, pensamos, $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Pero, desde luego, " = " significa "representa el mismo número que". Al ver $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$, podemos decir $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, y esto será muy fácil, si se ha recalcado adecuadamente la idea de "representa el mismo número que".

Otra idea familiar está también incluida en lo que hemos dicho. A menudo, tratamos de dividir el numerador y el denominador por el mismo número natural. Por ejemplo, pensamos:

$$\frac{6}{8} = \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$$

Este enunciado se traduce fácilmente en un enunciado de multiplicación, puesto que la multiplicación y la división son operaciones inversas: $6 \div 2 = 3$ significa $3 \times 2 = 6$.

(c). Uso de la factorización. La idea de que multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por un número natural da una nueva fracción que representa el mismo número que la fracción original es una idea muy apropiada para ser estudiada en la unidad dedicada a la factorización. Para hallar un nombre más simple de $\frac{12}{15}$, escribimos:

$$\frac{12}{15} = \frac{2 \times 2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{2 \times 2}{5} = \frac{4}{5}$$

Supóngase que consideramos dos fracciones. ¿Cómo decidiremos si representan o no el mismo número? Hay dos posibilidades:

Regla (1). Es posible que para dos fracciones como $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$, una de ellas se obtenga multiplicando el numerador y el denominador de la otra por un número natural. Con otras palabras, es posible representar las fracciones de la manera que acabamos de decir. Puesto que $\frac{2}{4} = \frac{2 \times 1}{2 \times 2}$, $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$ pertenecen al mismo conjunto; así, pues, representan el mismo número.

Regla (2). Algunas veces, no podamos emplear la regla 1 directamente. Por ejemplo, $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{6}$ no se pueden comparar directamente mediante la regla 1. Sin embargo, podemos usar la regla 1 para ver que $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ y, de ese modo, vemos que $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{6}$ representan el mismo número.

Obsérvese que al comparar $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{6}$, pudimos haber empleado las reglas 1 y 2 de manera diferente. Pudimos habernos dado cuenta de que:

$$\frac{2}{4} = \frac{2 \times 3}{4 \times 3} = \frac{6}{12} \qquad \text{y} \qquad \frac{3}{6} = \frac{3 \times 2}{6 \times 2} = \frac{6}{12}.$$

o pudimos haber dicho que:

$$\frac{2}{4} = \frac{2 \times 6}{4 \times 6} = \frac{12}{24} \qquad \text{y} \qquad \frac{3}{6} = \frac{3 \times 4}{6 \times 4} = \frac{12}{24}.$$

En el último ejemplo, obtuvimos otros nombres para $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{6}$,

utilizando fracciones con denominador 4×6. Desde luego, nos damos cuenta de que $4 \times 6 = 6 \times 4$. (Propiedad conmutativa.)

En nuestro ejemplo, vemos que 24 es un denominador común de $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{6}$, aunque no es el mínimo común denominador. No obstante, para dos fracciones cualesquiera, el producto de los dos denominadores es siempre un denominador común.

(d) Una prueba especial. Consideremos ahora una prueba especial para dos fracciones que representan el mismo número racional. En nuestro último ejemplo, utilizamos 6×4 como denominador común para $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{6}$. De modo que teníamos

$$\frac{2}{4} = \frac{2 \times 6}{4 \times 6} \qquad \text{y} \qquad \frac{3}{6} = \frac{3 \times 4}{6 \times 4}.$$

Podemos decir: Es cierto que $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, porque los dos numeradores resultantes, 2×3 y 3×4, son iguales, y los denominadores son iguales.

Con otras palabras, para comprobar si $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, sólo es necesario, una vez se haya comprendido el razonamiento, verificar que $2 \times 6 = 3 \times 4$, y este último enunciado numérico es cierto.

Del mismo modo, podemos verificar que $\frac{9}{15} = \frac{24}{40}$, comprobando que $9 \times 40 = 24 \times 15$, lo cual es cierto. Al hacer esto, pensamos:

$$\frac{9}{15} = \frac{9 \times 40}{15 \times 40} \qquad \text{y} \qquad \frac{24}{40} = \frac{24 \times 15}{40 \times 15}$$

Esto es un ejemplo de lo que algunas veces llamamos "regla de la multiplicación cruzada". Esta regla es muy útil en la resolución de proporciones. (Algunas veces se enuncia así: El producto de los medios es igual al producto de los extremos.)

La regla establece lo siguiente: Para comprobar que dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representan el mismo número, solamente, necesitamos verificar que $a \times d = b \times c$, es decir,

$$\frac{a}{b} \overset{?}{\times} \frac{c}{d}$$

Esta regla es importante para otras aplicaciones en la matemática, por ejemplo, en los triángulos semejantes. En textos avanzados de álgebra, se utiliza algunas veces como una manera de definir los números racionales. Es decir, un texto avanzado

podría decir: "Un número racional es un conjunto de símbolos como $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\}$. Dos símbolos, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, pertenecen al mismo conjunto, si $a \times d = b \times c$".

Lo que hemos hecho equivale a lo mismo, pero se desarrolló más intuitivamente. Para propósitos didácticos, la ides que conlleva la regla 1, de "multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número natural" puede verse más claramente que la regla de la "multiplicación cruzada".

Definitivamente, no es nuestra intención insistir en que los estudiantes aprendan formalmente las reglas 1 y 2. Sin embargo, esas reglas resumen una experiencia apropiada para ellos. Podemos formar una cadena de fracciones que representan el mismo número,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \ldots .$$

Cada fracción se obtiene multiplicando por 2 el numerador y el denominador de la fracción anterior. Podemos imaginar esto como la subdivisión repetida de un segmento o de una región (regla 1). Podemos formar una segunda cadena, empezando con $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{9}{18} \ldots$. Entonces, podemos entender que es posible escoger un numeral cualquiera de una de las cadenas e igualarlo a un numeral cualquiera de la otra, lo cual es exactamente lo que dice la regla 2.

Significado de número racional - Resumen

Resumamos lo obtenido hasta aquí en la explicación de los números racionales.

(1) Consideramos que un símbolo cualquiera entre los siguientes es el nombre de un número racional:

$$\frac{3}{8}, \quad \frac{0}{5}, \quad \frac{7}{6}, \quad 6, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{6}{4}, \quad 1, \quad \frac{5}{5}.$$

(2) Sabemos cómo asociar cada uno de dichos símbolos con un punto de la recta numérica.

(3) Sabemos que el mismo número racional puede tener muchos nombres que son fracciones. Así, $\frac{6}{4}$ y $\frac{3}{2}$ son fracciones que representan el mismo número.

(4) Sabemos que cuando representamos un número racional mediante una fracción, podemos multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por el mismo número natural para obtener una nueva fracción que represente el mismo número racional.

(5) Sabemos que al comparar dos números racionales es conveniente representarlos mediante fracciones que tengan denominadores iguales. También, sabemos que siempre podemos hallar fracciones de ese tipo para representar dos números racionales cualesquiera.

Hasta ahora, no hemos recalcado lo que a menudo se llama, en lenguaje tradicional, "reducir fracciones". Por ejemplo, "reducir" $\frac{6}{8}$, es simplemente representarla mediante la fracción que contenga el menor numerador y el menor denominador posibles. Como 2 es un factor de ambos, 6 y 8, vemos que

$$\frac{6}{8} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{3}{4}.$$

Hemos aplicado nuestra idea general de que "multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número natural" da un nuevo nombre para el mismo número. Podemos decir que $\frac{3}{4}$ es el nombre <u>más simple</u> del número que representa.

Podríamos decir que hemos hallado en $\frac{3}{4}$, el nombre más simple para el número racional que $\frac{6}{8}$ representa. Esto es más preciso que decir que hemos "reducido a" $\frac{6}{8}$, puesto que no hicimos más pequeño el numero que $\frac{6}{8}$ representa, sólo utilizamos otro par de números para representarlo.

(6) También, sabemos que 2 y $\frac{2}{1}$ son nombres del mismo número. Así, consideramos el conjunto de los números cardinales como un subconjunto de los números racionales. Un número cualquiera de este subconjunto se representa mediante una fracción con denominador 1. ($\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, etc., pertenecen a ese subconjunto.) 2 es el nombre de un número racional que es un número cardinal; 2 no es un nombre fraccionario para el número, pero dicho número se puede representar mediante las fracciones $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{2}$, etc.

En este momento, parece razonable emplear el término

"número" por número racional, siempre que el significado esté claro. Podemos preguntar por el <u>número</u> de pulgadas o la medida de una varita o el número de horas del día escolar.

(7) Podemos convenir en hablar sin más del <u>número</u> $\frac{2}{3}$, para evitar la expresión larga "el número representado por $\frac{2}{3}$". Así, podemos decir que el número $\frac{2}{3}$ es mayor que el número $\frac{1}{2}$ (como se comprueba fácilmente en la recta numérica). Esto sería preferible a decir que "la fracción $\frac{2}{3}$ es mayor que la fracción $\frac{1}{2}$", porque no queremos decir que un <u>nombre</u> es mayor que otro.

(8) No debemos decir que 3 es el denominador del número $\frac{2}{3}$, debido a que el mismo número tiene otros nombres (como $\frac{4}{6}$) con denominadores diferentes. 3 es más bien el denominador de la <u>fracción</u> $\frac{2}{3}$.

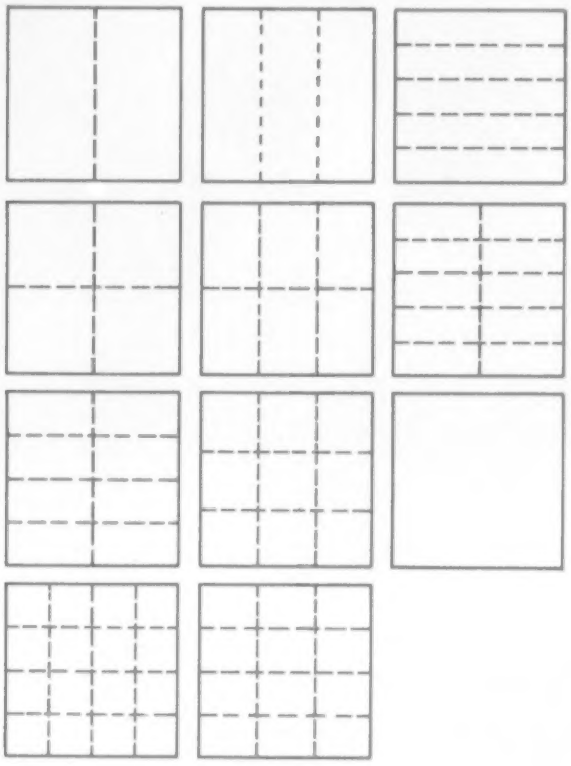
(9) Vimos que la idea de número racional es importante para tratar las regiones y los segmentos de recta. Pronto, veremos cómo se relaciona esta idea con ciertos problemas acerca de conjuntos.

Ahora, podríamos introducir algunos decimales. El numeral 0.1, por ejemplo, es otro nombre para $\frac{1}{10}$. Sin embargo, podemos explicar más fácilmente un numeral como 1.7, cuando hayamos desarrollado la idea de <u>sumar</u> números racionales.

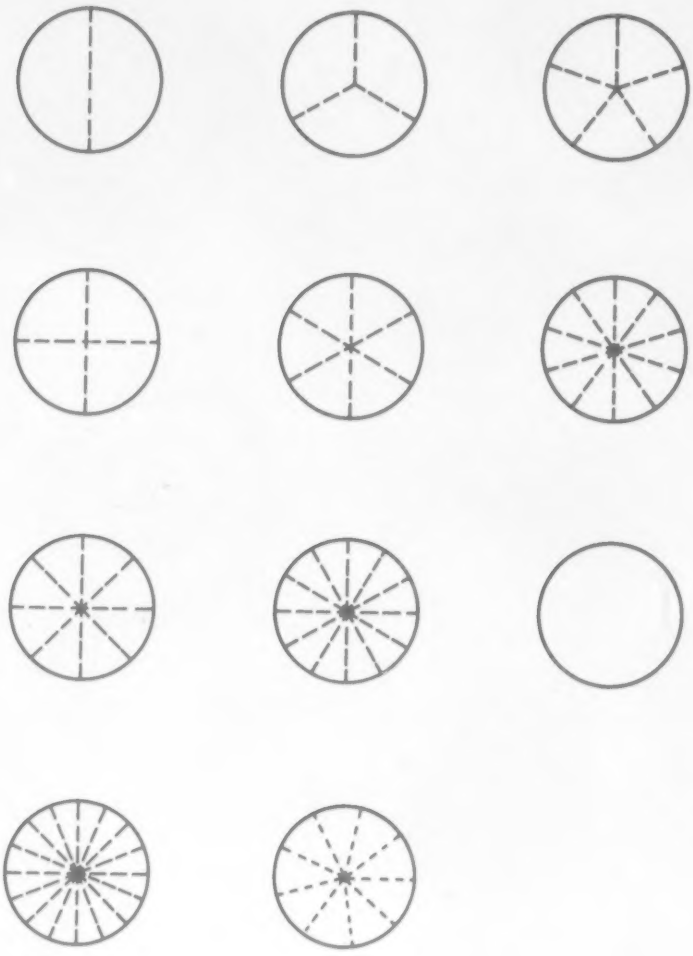
MATERIALES

El uso amplio de materiales ilustrativos es muy importante para desarrollar la comprensión de los números racionales. En las próximas páginas, sugerimos el uso de varios tipos de materiales que han resultado útiles. Con éstos, pueden utilizarse otros materiales disponibles.

En el estudio de este capítulo, el maestro encontrará de valor el uso de las tarjetas ilustradas a continuación, de las cuales pueden hacerse modelos en trozos de cartulina de un pie cuadrado para el maestro y en tarjetas más pequeñas para distribuirlas entre los estudiantes. Puede utilizarse acetato coloreado para indicar las áreas sombreadas en los modelos del maestro. Los alumnos pueden utilizar trozos de papel de colores para designar un número específico de partes de una región.

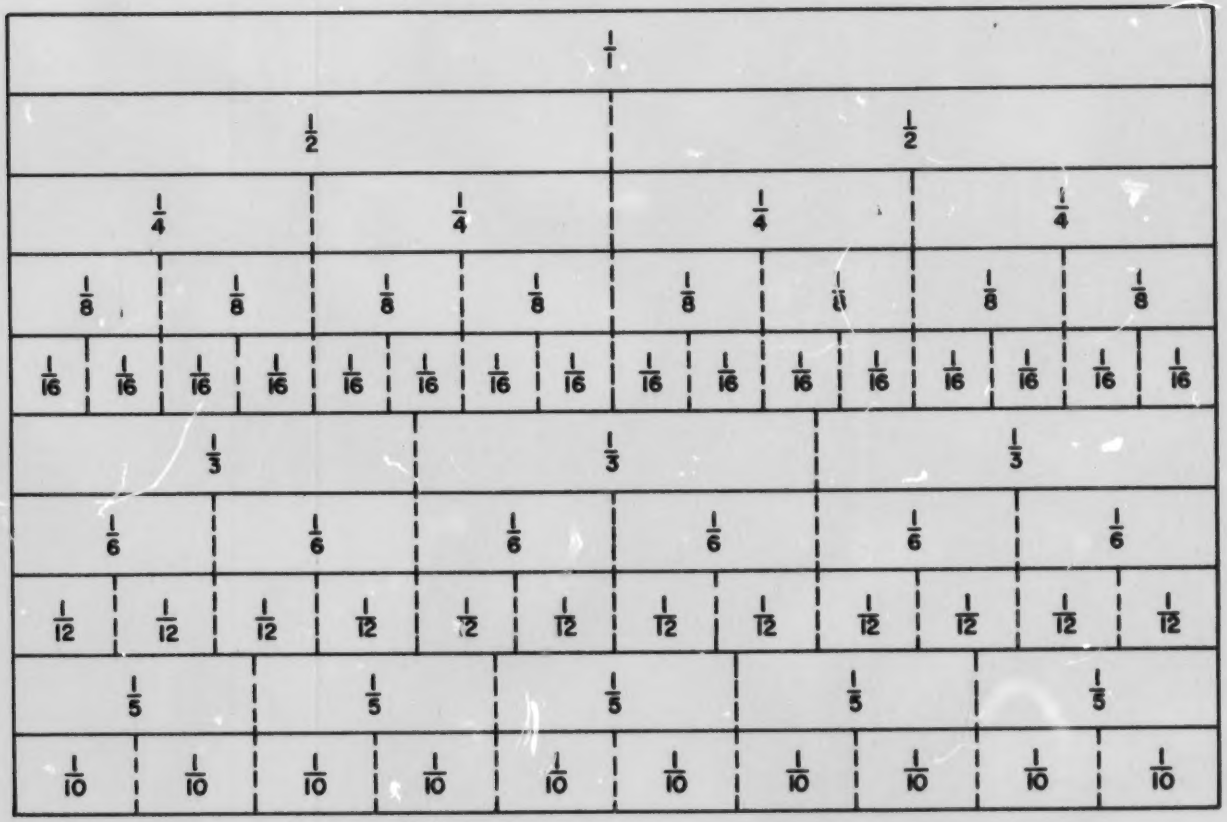


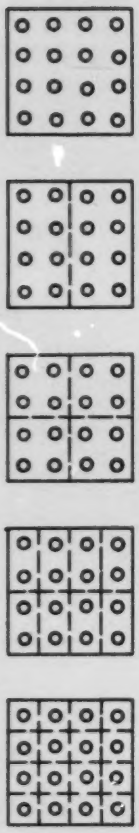
Pueden copiarse modelos de las siguientes regiones circulares en trozos de cartulina, papel de dibujo o cartón:



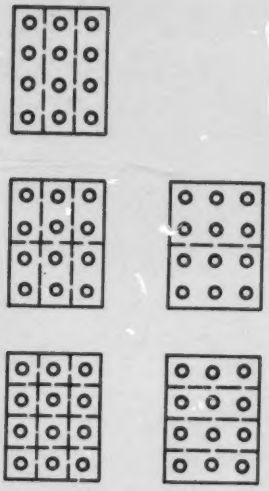
0/2
1/2
2/2
0/4
1/4
2/4
3/4
4/4
0/8
1/8
2/8
3/8
4/8
5/8
6/8
7/8
8/8
0/16
1/16
2/16
3/16
4/16
5/16
6/16
7/16
8/16
9/16
10/16
11/16
12/16
13/16
14/16
15/16
16/16
0/3
1/3
2/3
3/3
0/6
1/6
2/6
3/6
4/6
5/6
6/6
0/12
1/12
2/12
3/12
4/12
5/12
6/12
7/12
8/12
9/12
10/12
11/12
12/12
0/5
1/5
2/5
3/5
4/5
5/5
0/10
1/10
2/10
3/10
4/10
5/10
6/10
7/10
8/10
9/10
10/10

Tabla de fracciones

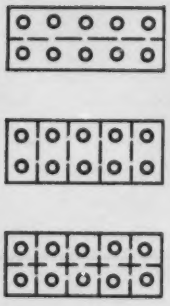




Conjunto A



Conjunto B



Conjunto C

Las disposiciones anteriores pueden utilizarse para explicar el concepto de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc., de un conjunto de objetos. Puede utilizarse acetato coloreado para indicar $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, etc., de un conjunto de objetos.

El maestro puede hacer copias mimeografiadas del siguiente conjunto de rectas para el uso de los estudiantes, en esta uridad:

ENSEÑANZA DE LA UNIDAD

LA IDEA DE NUMERO RACIONAL

Objetivo: Ofrecer ejercicios que sugieran números racionales, sin utilizar símbolos de fracción para los números, de la siguiente manera:

a) descomponiendo regiones y segmentos de recta en partes congruentes y conjuntos de objetos en subconjuntos equivalentes y

b) nombrando el número de partes en que una región unidad o un segmento ha sido descompuesto y el número de partes que se han de utilizar.

Materiales: Véanse las sugerencias acerca de los materiales que pueden utilizarse en esta unidad.

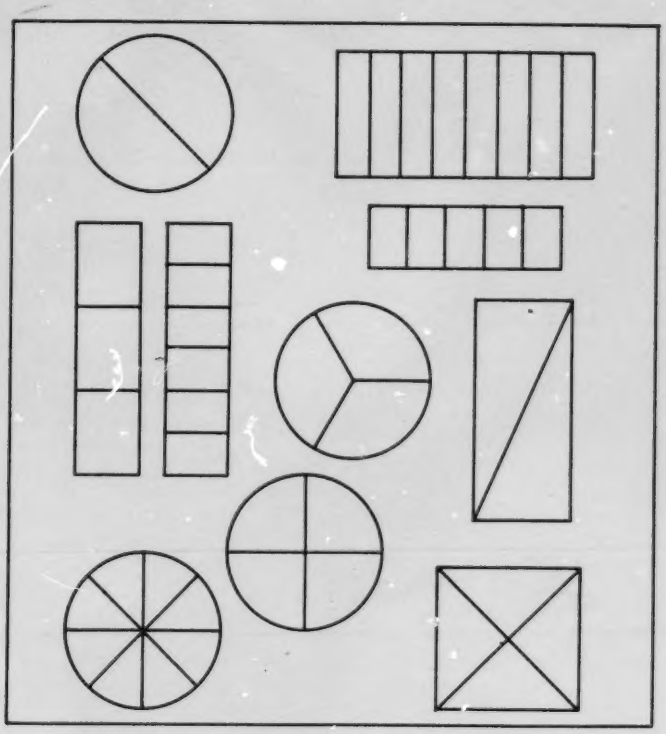
En los primeros ejercicios que pueden repasarse, nos limitaremos a los casos en que el número de partes utilizadas no es mayor que el número de partes congruentes en que se descompuso la unidad, es decir, $n \geq 1$.

Sugerencias para la enseñanza:

Aunque la idea de los números racionales (probablemente, los alumnos los llamarán fracciones) no es nueva para los alumnos de cuarto grado, preferimos ocuparnos primero de los conceptos, más bien que de los símbolos. En estos primeros ejercicios, se hizo un esfuerzo para desarrollar la idea de que (1) especificamos una unidad (región, segmento, conjunto), (2) descomponemos o dividimos la unidad en partes congruentes o equivalentes y (3) nombramos el número de partes que vamos a utilizar. Deliberadamente, no utilizamos la notación $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, etc. Se pueden emplear las frases un cuarto, una mitad, etc.

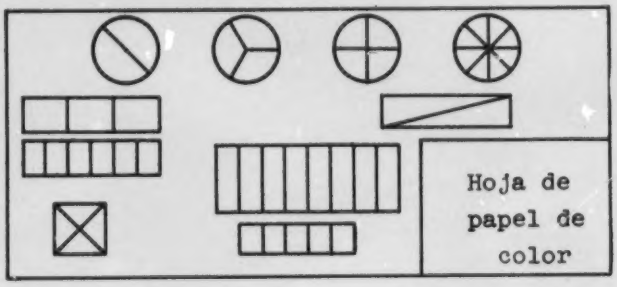
Preparación para esta lección. Prepárese un conjunto de materiales, de modo que los alumnos dispongan de varios modelos de regiones rectangulares y regiones circulares. A continuación, damos como ejemplo una hoja de papel que podría preparse y duplicarse. El maestro puede elegir sus propios modelos. Cada alumno puede recortar sus propios modelos y guardarlos en un sobre para uso futuro. (Quizás, puede hacerlo como tarea fuera de las horas de clase.) El maestro también puede proporcionarle el material a cada alumno.

Las figuras ilustradas no representan los tamaños reales. Deben construirse de un tamaño adecuado para el uso de los alumnos.



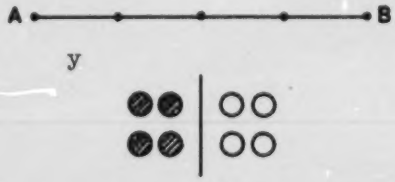
El maestro podría utilizar trozos de fieltro sobre un tablero de franela para trabajar con la clase.

Al comenzar la clase, pídase a cada alumno que coloque el material sobre el pupitre (v. la ilustración más adelante). También, debe darse a cada uno una tarjeta de color o una hoja de papel de color. Esto servirá para contrastar la región que se va a estudiar, al colocarla sobre el tablero para su identificación.



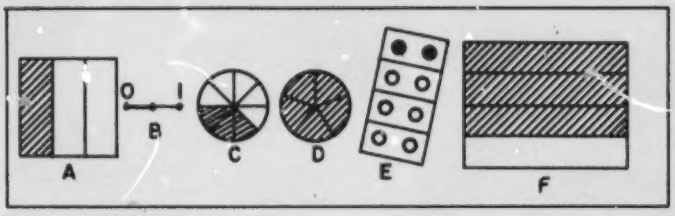
Primero, descríbanse las regiones e indíquese en cuántas partes se descompuso cada una. Luego, pídase a cada alumno que coloque sobre el tablero una región que se haya descompuesto en tres partes congruentes. Pídase que señale 1 de esas partes, 2 de ellas, 3 de ellas, etc. Hágase lo mismo con otras regiones.

Entonces, utilícense segmentos de recta y conjuntos de objetos como los siguientes:



(NOTA: Las figuras anteriores no tienen tamaños adecuados para el trabajo en clase.)

Utilícense, por eso, discos de papel en los que algunas de las regiones congruentes de cada unidad son de un color y otras de otro, o utilícense materiales sobre el tablero de franela. Si no se dispone de otra cosa, dibújense figuras en la pizarra y sombréense algunas de las regiones, como se indica en la página siguiente:



Luego, constrúyase una tabla como la siguiente para anotar la información que se obtenga. Obsérvese que se utiliza un par de números en cada caso.

Figura	Número de partes congruentes en la unidad	Número de partes sombreadas
A	3	1
B	2	1
C	8	3
D	5	5
E	4	1
F	4	3

Para el último ejercicio, pídase a los alumnos que busquen regiones (rectangulares y circulares) descompuestas en 4 partes congruentes. Pregúntese si alguien puede sugerir otras maneras de descomponerlas en 4 partes congruentes. El maestro puede tener algunos modelos disponibles para los alumnos que quieran tratar estas experiencias por sí mismos e informar a la clase lo que han averiguado. Las siguientes figuras representan algunas de las cosas que pueden averiguar:

Ahora, utilícense la Exploración en el Texto del estudiante y el Conjunto de problemas 1.

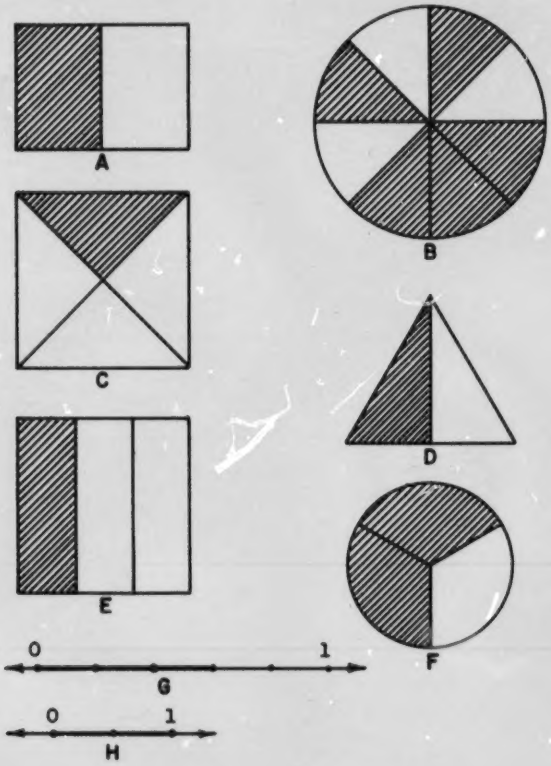
Capítulo 10

EL CONCEPTO DE NUMERO RACIONAL

LA IDEA DE NUMERO RACIONAL

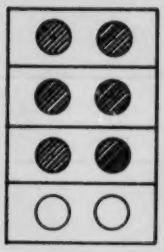
Exploración

Observa cada una de las figuras de esta página.
Para cada figura, escoge un par de números de los dados a la derecha que pueden utilizarse para hablar sobre el número de partes que están sombreadas y el número de partes congruentes en las cuales se ha dividido cada región unidad, segmento unidad, o conjunto.



Pares de números

a. 1 y 4
b. 3 y 4
c. 3 y 5
d. 1 y 2
e. 5 y 8
f. 1 y 3
g. 2 y 3
h. 2 y 2
i. 6 y 8
j. 2 y 5



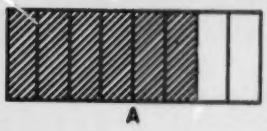
¿Te fue posible encontrar un par de números para cada uno? ¿Son tus respuestas las siguientes?: A-d; B-e; C-a; D-d; E-f; F-g; G-c; H-h; y I-i?

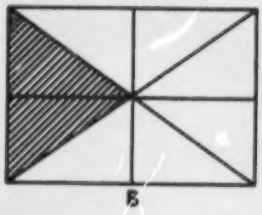
E507

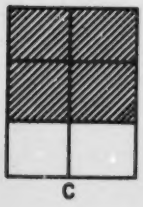
Conjunto de problemas 1

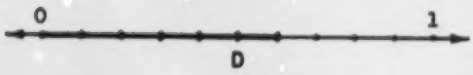
1. Copia la tabla y complétala, utilizando las figuras A, B, C, D, E, F y G:

Figura	Partes sombreadas	Partes congruentes en la unidad
A	6	8
B	2	8
C	4	6
D	6	10
E	2	5
F	6	6



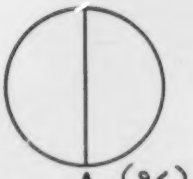




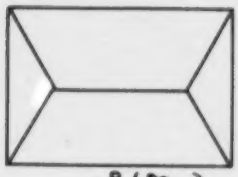


E508

2. Escribe en tu hoja de papel las letras A a la G. Después de cada una, escribe <u>Sí</u>, si la figura ha sido dividida en regiones congruentes. Escribe <u>No</u>, si la figura <u>no ha sido</u> dividida en regiones congruentes.

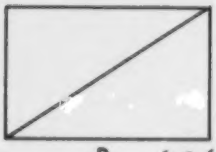


A (sí)

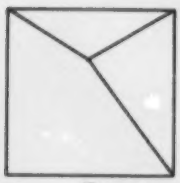


B (no)

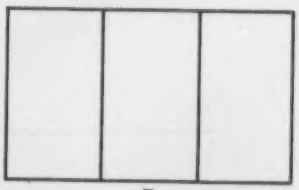
C (no)



D (sí)



E (no)

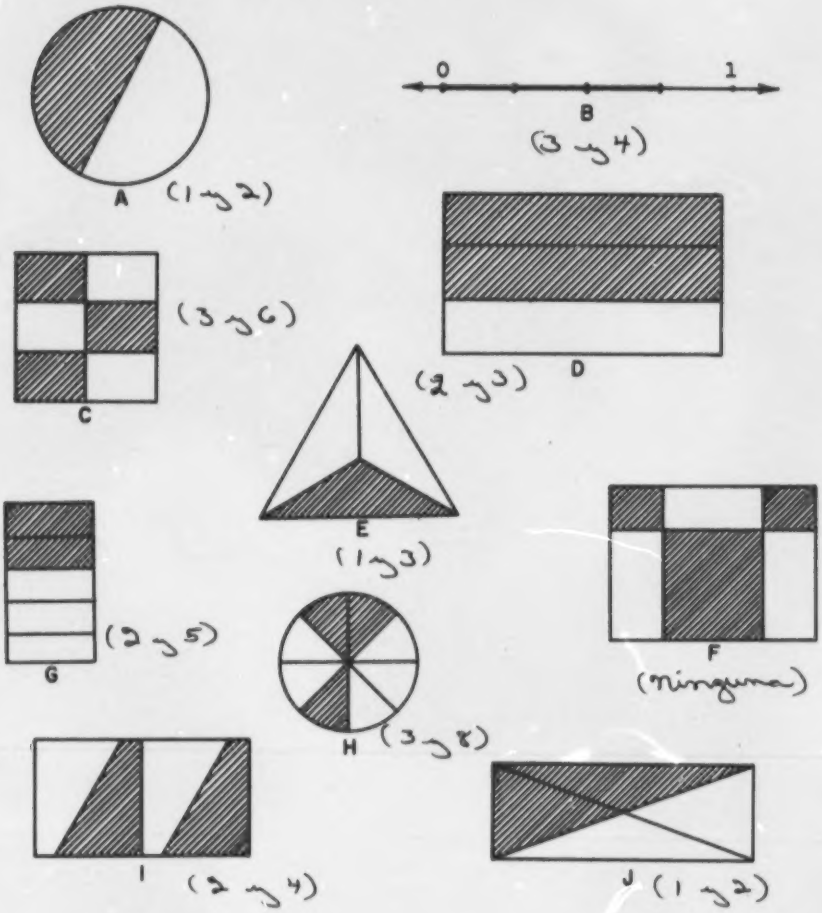


F (sí)

G (no)

E509

3. ¿Qué par de números puede usarse para hablar acerca de la región sombreada en cada figura? Recuerda que el primer número del par representa cuántas partes están sombreadas. El segundo número del par representa en cuántas partes congruentes se ha dividido la región unidad.



¿Hallaste algunas figuras que no han sido divididas en regiones congruentes? (sí) ¿Cuáles son? (F)

UNA NUEVA CLASE DE NUMEROS

Objetivos: Aprender a utilizar una fracción como un símbolo para representar un número racional. Ayudar a los estudiantes a ver que los numerales utilizados en un símbolo fraccionario están asociados con

(1) el número de partes congruentes en que se descompuso la región unidad, y
(2) el número de partes que se toman o consideran.

Sugerencias para la enseñanza:

Repaso de las representaciones de números cardinales. Recuérdense los ejercicios en los que se consideraban colecciones de objetos discretos y cómo esos conjuntos de objetos nos sugerían la idea de número cardinal.

Repaso de las ideas de la última lección. Recuérdense, luego, los ejercicios en la lección anterior, preguntando qué números sugieren los modelos de la Exploración. Pueden considerarse también algunos de los modelos de los problemas.

En este momento, pregúntese si estas ideas difieren de los modelos que sugieren números cardinales.

Números racionales. Obsérvese que hay una nueva clase de número y que los llamamos números racionales.

Fracciones para representar números racionales. Explíquese como utilizamos los pares de números que consideramos en la lección anterior para escribir el nombre de un número racional. Indíquese que llamamos a estos nombres fracciones.

Entonces, quizás, el maestro quiera utilizar los materiales del Texto del estudiante y algunas de las tareas sugeridas anteriormente, en que se da un paso más para nombrar el número de que se trata, utilizando regiones sombreadas, regiones no sombreadas, etc.

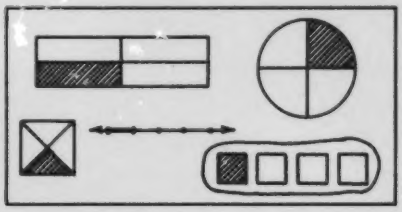
Ahora, estúdiese la sección Una nueva clase de número del Texto del estudiante.

E510

UNA NUEVA CLASE DE NUMEROS

Exploración

Cuando una región se divide en partes congruentes y algunas de estas partes se sombrean, utilizamos una nueva clase de números para describir lo que vemos. Estos nuevos números se llaman números racionales. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{8}$ son números racionales. Se leen, "una mitad", "un cuarto" y "tres octavos".



Cada una de las figuras a la derecha sugiere el mismo número racional. El número racional es un cuarto. El símbolo $\frac{1}{4}$, que nombra el número racional un cuarto, se llama una fracción. Las fracciones se escriben, usando dos numerales. Los dos numerales están separados por una raya horizontal.

Por ejemplo:

$$\frac{1}{4}$$

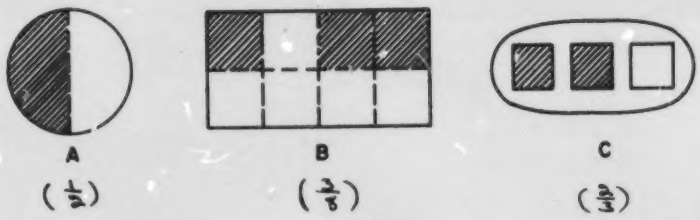
Los numerales son 1 y 4.

El numeral encima de la raya dice el número de partes congruentes de conjuntos equivalentes descritos. El número se llama el numerador.

El numeral debajo de la raya dice el números de partes congruentes en que se dividió el conjunto de objetos, la región unidad o el segmento unidad. El número se llama el denominador.

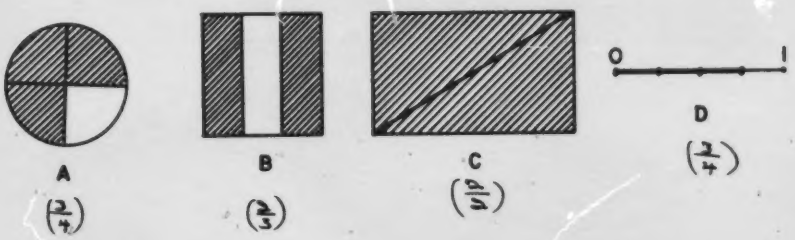
E511

¿Qué número racional está sugerido por cada una de las siguientes figuras?



$(\frac{1}{2})$ $(\frac{3}{8})$ $(\frac{2}{3})$

¿Qué número racional sugiere cada una de estas figuras?



$(\frac{3}{4})$ $(\frac{2}{3})$ $(\frac{2}{2})$ $(\frac{3}{4})$

La figura A sugiere el número racional $\frac{3}{4}$, el cual se lee "tres cuartos".

La figura B sugiere el número racional $\frac{2}{3}$, el cual se lee "dos tercios".

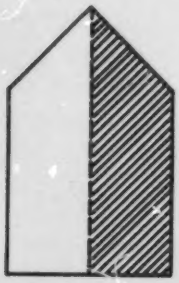
La figura C sugiere el número racional $\frac{2}{2}$, el cual se lee "dos mitades".

La figura D también sugiere el número racional $\frac{3}{4}$.

E512

Conjunto de problemas 2

1. Para cada figura, escribe una fracción que nombre el número racional sugerido por la región sombreada:

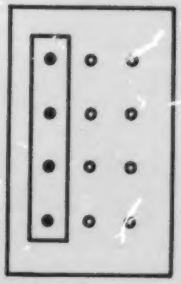


A

$(\frac{1}{2})$

B

$(\frac{1}{6})$

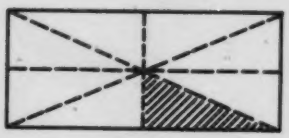


C

$(\frac{1}{3})$

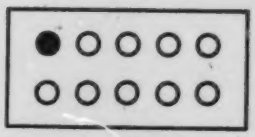
D

$(\frac{1}{4})$



E

$(\frac{1}{2})$



F

$(\frac{1}{10})$

2. Escribe como fracciones:

a) una mitad $\frac{1}{2}$

b) un tercio $\frac{1}{3}$

c) un décimo $\frac{1}{10}$

d) un octavo $\frac{1}{8}$

e) un sexto $\frac{1}{6}$

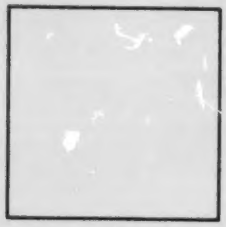
f) un cuarto $\frac{1}{4}$

E513

3. Copia el cuadrado unidad de la figura H por lo menos seis veces. (Haz más copias, si las necesitas.) ¿De cuántas maneras puedes separar el cuadrado unidad para representar las siguientes fracciones?

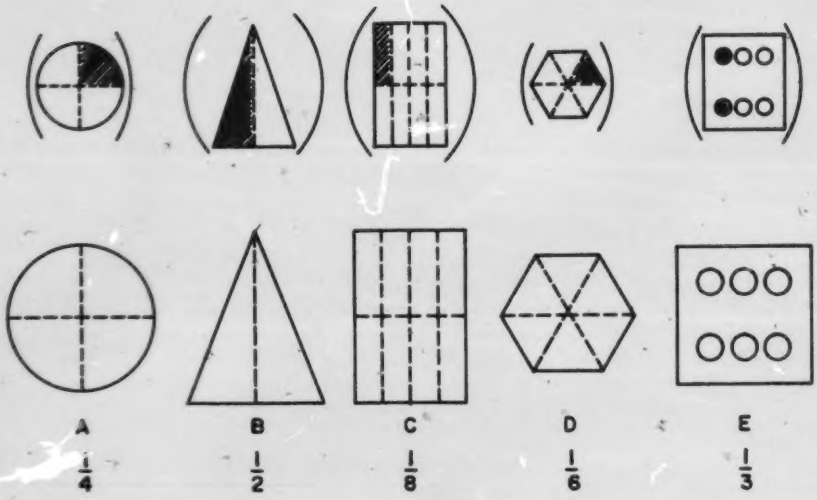
$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$

(Hay varias respuestas posibles.)



H

4. Copia y sombrea la parte que representa la fracción al pie de cada figura:



E514

5. Copia y completa la tabla siguiente:

Fracción	Número de partes congruentes en la unidad	Número de partes congruentes contadas
$\frac{1}{4}$	4	1
$\frac{1}{2}$	2	1
$\frac{1}{10}$	10	1
$\frac{1}{6}$	6	1
$\frac{1}{3}$	3	1
$\frac{1}{8}$	8	1

6. En tu hoja de papel, haz 6 copias de la región unidad que aparece después. Haz las regiones unidad del mismo tamaño. Luego determina una figura que sugiera cada uno de los números racionales nombrados en el ejercicio 5. (Hay varias respuestas posibles.)

E515

Conjunto de problemas 3

1. Usa estas figuras para completar la tabla que sigue; la parte A se presenta como un ejemplo:

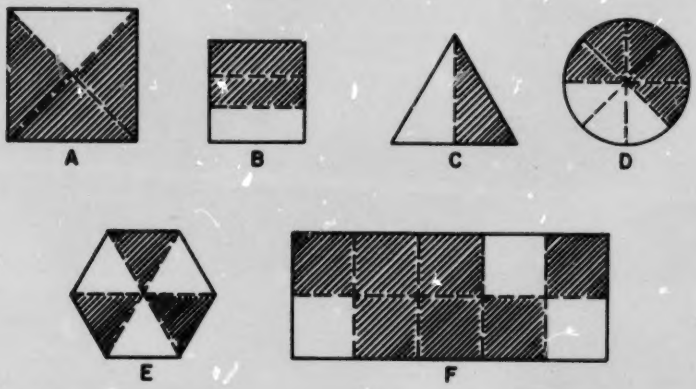


Figura	Número de partes congruentes en la figura	Número de partes sombreadas	Número racional sugerido por la parte sombreada
A	4	3	$\frac{3}{4}$
B	3	2	$\frac{2}{3}$
C	2	1	$\frac{1}{2}$
D	8	5	$\frac{5}{8}$
E	6	3	$\frac{3}{6}$
F	10	7	$\frac{7}{10}$

E516

2. Utilizando las figuras A, B, C, D, E y F del ejercicio 1, escribe el nombre del número racional sugerido por la parte no sombreada de cada figura.

$$\begin{pmatrix} A - \frac{1}{4} & E - \frac{3}{6} \\ B - \frac{1}{3} & F - \frac{3}{10} \\ C - \frac{1}{2} & \\ D - \frac{3}{8} & \end{pmatrix}$$

3. Utiliza estas figuras para completar los enunciados que aparecen más adelante:

Figura A

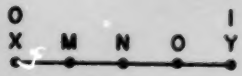


Figura B

Conjunto C = {1,2,4,6,8,10,12,14}

Figura C

a) La figura A se dividió en 2 regiones congruentes. Se sombreó 1 región. La región sombreada está mejor descrita por el número racional nombrado por la fracción $\frac{1}{2}$.

b) Los puntos M, N y O dividen a $\overline{XY}$ en 4 segmentos congruentes. m $\overline{XM}$ = $\frac{1}{4}$.

c) El conjunto C tiene 8 miembros. El miembro 1 nombra un número impar. Este miembro es $\frac{1}{8}$ de todos los miembros del conjunto C.

E517

4. Estudia tus respuestas a los ejercicios 1, 2 y 3. Copia y, luego, escribe "encima" o "debajo" en cada espacio en blanco.

   a) El numeral (debajo) de la raya nombra el número de partes congruentes en las cuales se ha dividido la unidad.

   b) El numeral (encima) de la raya nombra el número de partes congruentes que están descritas.

5. Ana vio 3 programas de televisión. Cada uno era de $\frac{1}{4}$ de hora de duración.

   a) ¿Cuánto tiempo empleó en ver los programas de televisión? ($\frac{3}{4}$ de hora)

   b) ¿Cuánto tiempo más tenía que emplear viendo programas para que su tiempo total fuera 1 hora? ($\frac{1}{4}$ de hora)

6. Una figura como la que se ilustra abajo, se construyó colocando palillos de dientes, todos del mismo tamaño, de manera que sus extremos se toquen. ¿Qué parte fraccionaria del perímetro es el "techo" ? ($\frac{2}{5}$)

1.

NUMEROS RACIONALES MAYORES QUE UNO

Objetivo: Asociar números racionales con puntos de la recta numérica y extender estos números más allá de lo que sugieren los segmentos unidad y las partes congruentes del segmento unidad.

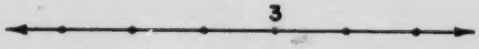
Aprender a identificar los números racionales sugeridos por diagramas, cuando se utiliza más de una región unidad.

Materiales: Prepárese para cada alumno una copia mimeografiada de una hoja de papel con varias rectas numéricas dibujadas. Una deberá estar marcada con segmentos unidad. Además, debe haber rectas marcadas con segmentos de $\frac{1}{2}$ unidad de longitud, de $\frac{1}{4}$ de unidad de longitud, de $\frac{1}{8}$ de unidad de longitud, de $\frac{1}{5}$ de unidad de longitud, de $\frac{1}{3}$ de unidad de longitud, de $\frac{1}{6}$ de unidad de longitud, de $\frac{1}{10}$ de unidad de longitud y de $\frac{1}{12}$ de unidad de longitud. (Esto servirá para ayudar a los estudiantes a nombrar el número asociado con los puntos que descomponen el segmento unidad en las partes congruentes indicadas.

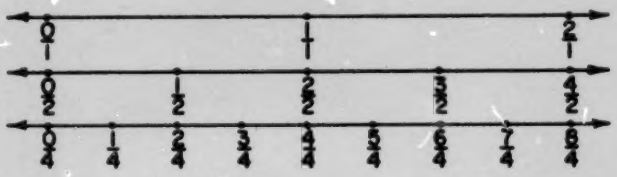
Sugerencias para la enseñanza:

Recuérdese con los alumnos que aprendimos a determinar que numeros racionales sugerían partes unidad de regiones, segmentos de rectas y conjuntos unidad de objetos.

Recuérdese que sabemos cómo asociar puntos de la recta numérica con números cardinales. Entonces, dibújese una recta en la pizarra y márquese, por ejemplo, un punto con el cual se pueda asociar el número 3. Pídase a los estudiantes que sugieran los números para otros puntos.



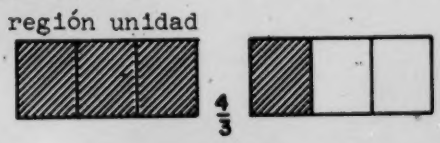
Con los conjuntos de rectas numéricas sugeridas en la sección Materiales, pídase primero que asocien varios números racionales con los puntos de la recta marcada con segmentos unidad, después con la recta marcada con segmentos de media unidad, etc., como se ilustra a continuación:



Cuéntese por mitades empezando con $\frac{1}{2}$, por cuartos empezando con un cuarto, etc. Cuéntese no solamente hacia adelante, sino también hacia atrás.

Luego, pídase a los alumnos que localicen una y media unidades en la recta numérica. (Debe esperarse que elijan la recta marcada con segmentos de media unidad.) Exíjase que indiquen las fracciones que denotan el número. Háganse otros ejercicios parecidos, como, por ejemplo, determinar el número racional representado por la fracción $\frac{8}{4}$, utilizando la recta numérica con un octavo, etc., como unidad.

Entonces, utilícense los materiales sobre el tablero de franela o dibujos en la pizarra, y pídase a los alumnos que nombren el número racional asociado en cada caso, como se ilustra a continuación:



(Nota: Si el maestro considera que es conveniente en este momento nombrar un número racional mediante la forma mixta, puede hacerlo. Obsérvese con los alumnos que podemos nombrar un número como $\frac{3}{2}$ de dos maneras: utilizando la fracción o indicando el número de segmentos unidad y de partes de segmentos unidad, como 1 y $\frac{1}{2}$. También, el maestro puede, si lo desea, mostrar cómo podemos escribir 1 y $\frac{1}{2}$ de una

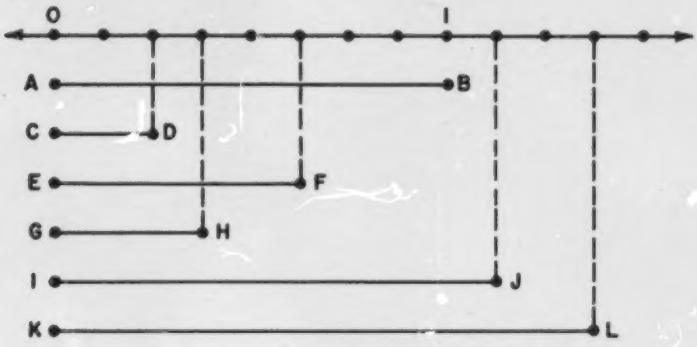
manera más corta, es decir, como $1\frac{1}{2}$. No nos interesa pasar de las fracciones a formas mixtas y viceversa, utilizando símbolos. Todo esto debe hacerse, utilizando la recta numérica u otros modelos, como regiones rectangulares y circulares. Quizás, el maestro desee utilizar en este momento algunos de los materiales que se sugieren más adelante en la sección Una nueva clase de nombres.

E518

NUMEROS RACIONALES MAYORES QUE UNO

Exploración

En la figura que sigue, el segmento de recta AB tiene 1 unidad de largo.



1. (a) En la recta numérica, el segmento unidad es divisible en 8 segmentos congruentes.

   (b) Emplea una fracción: Cada segmento pequeño es $\frac{1}{8}$ del segmento unidad.

   (c) La medida de $\overline{AB}$ es 1. La medida de $\overline{AB}$ es también $\frac{8}{8}$. (Emplea una fracción.)

   (d) ¿Es $\frac{8}{8}$ la medida del segmento de recta AB? (نعم)

   (e) ¿Es $\frac{2}{8}$ la medida del segmento de recta CD? (نعم)

   (f) ¿Es $\frac{5}{8}$ la medida del segmento de recta EF? (نعم)

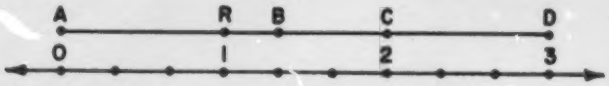
   (g) ¿Es $\frac{3}{8}$ la medida del segmento de recta GH? (نعم)

   (h) ¿Es $\frac{9}{8}$ la medida del segmento de recta IJ? (نعم)

   (i) ¿Es $\frac{11}{8}$ la medida del segmento de recta KL? (نعم)

E519

2. Cada segmento unidad de la recta numérica que aparece a continuación se dividió en 3 segmentos congruentes. $\overline{AR}$ es de la misma longitud que el segmento unidad.



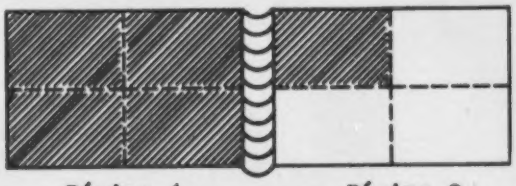
Utiliza esta recta numérica para contestar las preguntas.

(a) ¿Qué fracción nombra la medida de $\overline{AR}$? ($\frac{1}{3}$)

(b) ¿Qué fracción nombra la medida de $\overline{AB}$? ¿$\overline{AC}$? ¿$\overline{AD}$?

($\frac{4}{3}$) ($\frac{5}{3}$) ($\frac{9}{3}$)

3. Guillermo tiene un álbum para fotografías. Cada página está dividida en 4 partes congruentes. En cada página, puede poner 4 fotografías.



Si Guillermo pega 5 fotografías en su álbum, cubrirá $\frac{4}{4}$ de una página y $\frac{1}{4}$ de otra página. ¿Qué número racional describe el número de páginas cubiertas? (Uno y un cuarto)

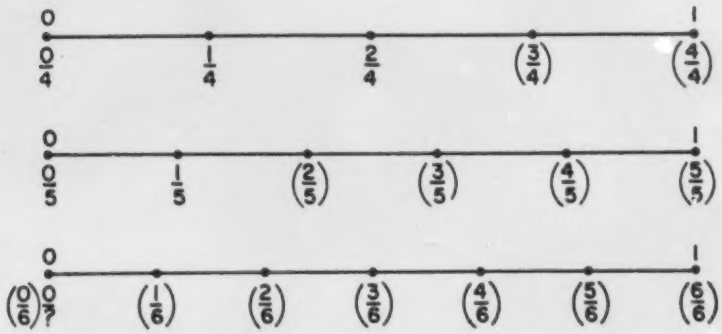
Fracciones como $\frac{2}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ nos dicen que la medida de un segmento o una región es menor que 1.

Fracciones como $\frac{8}{8}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$ nos dicen que la medida de un segmento o región es exactamente 1.

Fracciones como $\frac{9}{8}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{2}$ nos dicen que la medida de un segmento o región es mayor que 1.

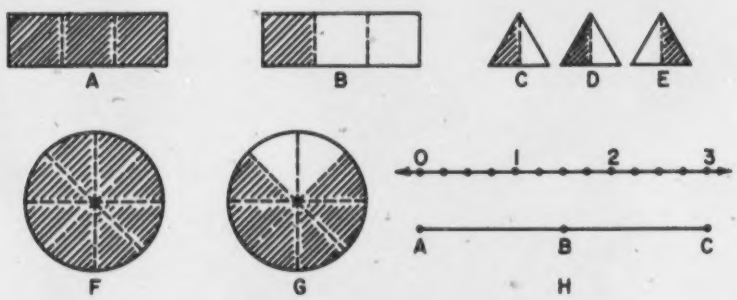
Conjunto de problemas 4

1. Copia los segmentos unidad que aparecen a continuación. Los puntos dividen cada segmento unidad en segmentos congruentes más pequeños. Marca cada punto correctamente.



Cada una de las figuras que siguen representa una región unidad o un segmento unidad.

2. Estudia los siguientes diagramas; luego, contesta las preguntas de la página siguiente:



E521

a) ¿Cuántos tercios hay en A? (3)

¿Cuántos tercios hay en B? (3)

¿Cuántos tercios se indican en A y B juntas? (6)

¿Qué fracción racional sugieren las regiones sombreadas en A y B juntas? ($\frac{4}{3}$)

¿Qué número racional sugieren las regiones no sombreadas en A y B juntas? ($\frac{2}{3}$)

b) ¿Qué número racional sugiere la región sombreada en C?; ($\frac{1}{2}$) ¿en D?; ($\frac{1}{2}$) ¿en E? ($\frac{1}{2}$)

¿Qué número racional sugiere la región no sombreada en C?; ($\frac{1}{2}$) ¿en D?; ($\frac{1}{2}$) ¿en E? ($\frac{1}{2}$)

¿Qué número racional describe mejor las regiones sombreadas en C, D y E juntas? ($\frac{3}{2}$)

¿Qué número racional describe mejor las regiones no sombreadas en C, D y E juntas? ($\frac{3}{2}$)

c) ¿Qué número racional sugieren las regiones sombreadas en F y G juntas? ($\frac{14}{8}$)

¿Qué número racional sugieren las regiones no sombreadas en F y G juntas? ($\frac{2}{8}$)

d) En la figura H, ¿qué número racional es la medida de $\overline{AB}$?; ($\frac{6}{4}$) ¿de $\overline{AC}$? ($\frac{12}{4}$)

E522

3. Para cada figura, escribe la fracción que nombra el número racional sugerido por la parte sombreada:

Figura A $\left(\frac{3}{2}\right)$.

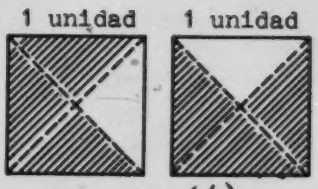


Figura B $\left(\frac{6}{4}\right)$

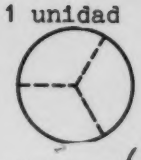


Figura C $\left(\frac{6}{3}\right)$

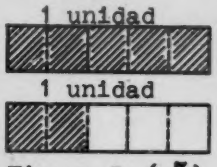
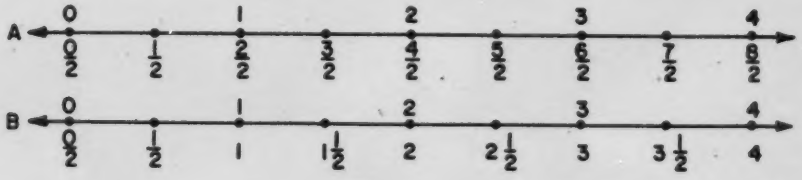


Figura D $\left(\frac{7}{5}\right)$

Figura E $\left(\frac{4}{6}\right)$

4. Utilizando estas rectas numéricas, completa los enunciados que aparecen más adelante:



a) 1 uno y 1 mitad = $\frac{3}{2}$ ó 1 1/2

b) 4 = $\frac{8}{2}$

c) 3 unos y 1 mitad = $\frac{7}{2}$ ó 3 1/2

d) 2 unos y 1 mitad = $\frac{5}{2}$ ó 2 1/2

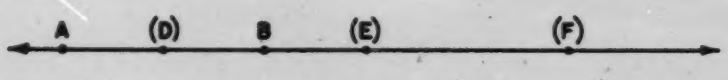
e) $\frac{3}{2}$ = 1 uno y 1 mitad

f) 2 = $\frac{4}{2}$

g) $\frac{2}{2}$ = 1

E523

5. Copia en tu hoja de papel el segmento de recta que se muestra a continuación:



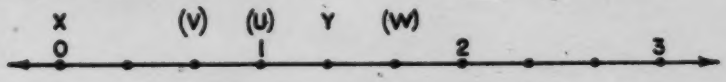
$\overline{AB}$ es un segmento unidad.

a) Marca un punto D de manera que $\overline{AD}$ mida $\frac{1}{2}$ unidad de largo.

b) Marca un punto E de manera que $\overline{AE}$ mida $\frac{3}{2}$ unidades de largo.

c) Marca un punto F de manera que $\overline{AF}$ mida $\frac{5}{2}$ unidades de largo.

6. Copia el siguiente segmento de recta; observa que cada segmento unidad se dividió en 3 segmentos congruentes:



Usando cierta unidad, la medida de $\overline{XY}$ es $\frac{4}{3}$.

Marca nuevos puntos U, V y W de manera que

a) $\overline{XU}$ mida 1 unidad de largo.

b) $\overline{XV}$ mida $\frac{2}{3}$ unidades de largo.

c) $\overline{XW}$ mida $\frac{5}{3}$ unidades de largo.

7. Marcos mide 4 pies de alto. ¿Qué número da su altura en yardas? (Uno y un tercio)

8. Elena vio 5 programas de televisión. Determina cuántas horas empleó en ver TV, si cada programa era de:

a) $\frac{1}{4}$ de hora de duración (Una hora y cuarto)

b) $\frac{1}{2}$ de 1 hora de duración (2 horas y media)

NOMBRES DIFERENTES PARA EL MISMO NUMERO

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a ver que el mismo número racional tiene varios nombres.

Ayudar a los estudiantes a aprender a elegir el nombre más simple.

Materiales: Una tabla de fracciones o regiones circulares que indiquen la unidad, mitades, cuartos, tercios, quintos, sextos, octavos, décimos, dozavos.

Varias rectas numéricas,
una para la "familia de las mitades, los cuartos, los octavos y los dozavos",
una para la "familia de los tercios, los sextos y los dozavos", y
una para la "familia de las mitades, los quintos y los décimos".

Sugerencias para la enseñanza:

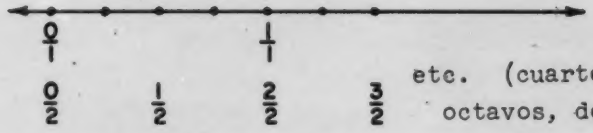
Utilizando la tabla de fracciones, pídase a los alumnos que determinen las partes de regiones que representan la misma parte de una unidad. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{3}{6}$ y $\frac{5}{10}$ todas representan una misma parte de una unidad.

Analícense otros ejemplos como $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, etc.

Obsérvese con los alumnos que éstos representan la misma parte.

Expresamos esta idea, diciendo $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, etc. Podemos nombrar un conjunto de fracciones que hagan lo mismo. Escríbanse las fracciones y, después, inclúyanse otras que podrían ser miembros del conjunto, aunque no se tengan modelos de ellas.

Ahora, utilícense rectas numéricas. Sin embargo, en lugar de escribir las fracciones debajo de cada recta, escríbase cada conjunto de fracciones, asociándolo con cada punto de la misma recta; es decir, como se indicó anteriormente.



etc. (cuartos, octavos, dozavos)

Obsérvese que hay varias fracciones escritas debajo de un mismo punto. Podemos escribirlas como conjuntos de fracciones; por ejemplo, así:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{4}{8},\ \frac{6}{12},\ \text{etc.}$$

De nuevo, quizás, el maestro quiera preguntar si alguien puede dar otra fracción que sea un elemento del conjunto. Si hay alguna duda, el maestro puede decir que uno de los números del par es 20 y escribir 20 debajo de la raya. Pídase que den el número que va encima de la raya. El maestro podría, también, dar el primer número del par y pedir a los alumnos que den el otro.

También, podría preguntarse si alguien tiene una idea de cómo se pueden seguir determinando otras fracciones.

Continúese con otras fracciones, cuando se tengan varios nombres para el mismo número.

Destáquense las fracciones que representan números cardinales.

Plantéese la pregunta siguiente: Si tenemos varios nombres, ¿cómo escogemos el que debemos utilizar? Obsérvese que la fracción compuesta de los números más pequeños, a veces, se llama la fracción básica. Es decir, eligiríamos $\frac{1}{2}$ del conjunto $\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{4}{8},\ \ldots\}$.

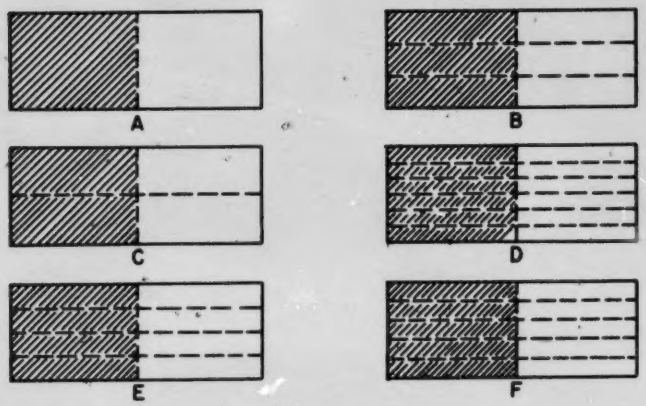
Ahora, estúdiese el material del Texto del estudiante.

E524

NOMBRES DIFERENTES PARA EL MISMO NUMERO

Exploración

1. Las siguientes figuras que representan regiones unidad sugieren algunas maneras de pensar en una mitad:



En A, ¿qué fracción nombra la medida de la región sombreada? ($\frac{1}{2}$)

En B, ¿qué fracción nombra la medida de la región sombreada? ($\frac{3}{6}$)

En C, ¿qué fracción nombra la medida de la región sombreada? ($\frac{2}{4}$)

En D, ¿qué fracción nombra la medida de la región sombreada? ($\frac{6}{12}$)

En E, ¿qué fracción nombra la medida de la región sombreada? ($\frac{4}{8}$)

En F, ¿qué fracción nombra la medida de la región sombreada? ($\frac{5}{10}$)

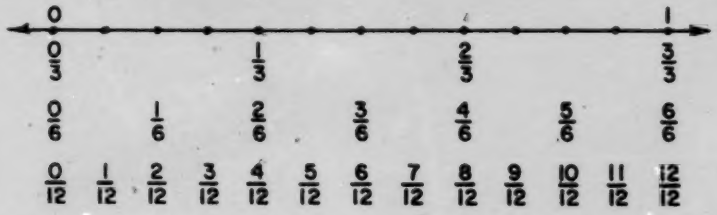
$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{8}$ y $\frac{5}{10}$ son todas, diversas maneras o formas de nombrar el número racional $\frac{1}{2}$.

Podemos escribir: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$

¿Cuáles son algunas otras fracciones que nombran este mismo número? ($\frac{2}{4}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{7}{14}$, etc.)

Decimos que $\frac{1}{2}$ es el nombre más simple, o la forma más simple,

para este número racional. ¿Puedes decir por qué? (1 y 2 se el por que consiste en los números más pequeños.)



2. Construye enunciados ciertos, escribiendo una fracción en cada espacio en blanco. Utiliza la recta numérica anterior como ayuda.

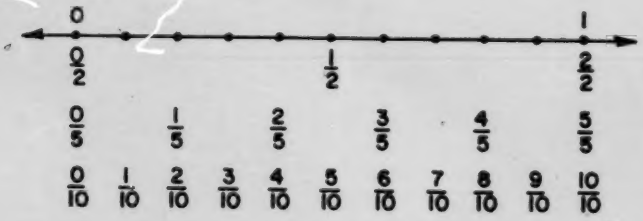
a. $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$

b. $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

c. $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$

d. $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

e. $1 = \frac{3}{3} = \frac{6}{6} = \frac{12}{12}$



3. Utiliza la recta numérica anterior como ayuda para escribir el numerador o denominador que falta.

a. $\frac{1}{2} = \frac{n}{10}$ $(n=5)$

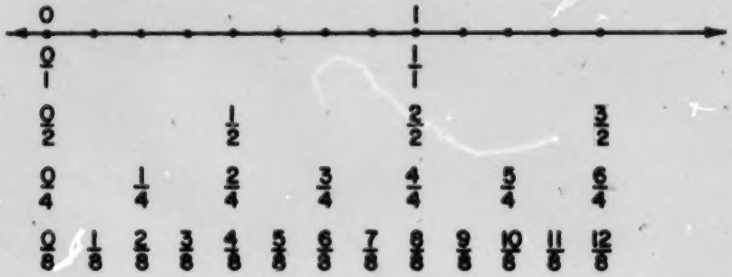
b. $\frac{2}{10} = \frac{1}{n}$ $(n=5)$

c. $\frac{4}{5} = \frac{n}{10}$ $(n=8)$

d. $1 = \frac{10}{n} = \frac{s}{5}$ $(n=10, s=5)$

E526

4. Utilizando una recta numérica, podemos proponer muchos nombres diferentes para un número racional.



Vemos que algunas fracciones son nombres para el mismo número racional.

¿Qué otras fracciones son nombres para el número racional $\frac{1}{2}$? ($\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$)

¿Qué otra fracción es un nombre para el número racional $\frac{1}{4}$? ($\frac{2}{8}$)

¿Qué otra fracción es un nombre para el número racional $\frac{3}{4}$? ($\frac{6}{8}$)

¿Puedes hallar otras fracciones que nombren el mismo número racional en esta recta? ($\frac{3}{2}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{12}{8}$, etc.)

Un número racional se puede nombrar mediante muchas fracciones.

El número racional $\frac{1}{4}$ se puede nombrar por: $\{\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{6}{24}, \ldots\}$

El número racional $\frac{2}{3}$ se puede nombrar por: $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \ldots\}$

El número racional $\frac{2}{5}$ se puede nombrar por: $\{\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \frac{8}{20}, \ldots\}$

El número racional $\frac{1}{10}$ se puede nombrar por: $\{\frac{1}{10}, \frac{2}{20}, \frac{3}{30}, \frac{4}{40}, \ldots\}$

¿Puedes pensar en otras fracciones que podrían nombrar cada uno de los números anteriores? ($\frac{7}{28}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{10}{25}$, $\frac{5}{50}$, etc.)

Muchas fracciones pueden emplearse para nombrar los mismos números cardinales.

Por ejemplo, 1 se puede indicar por

$\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, y así sucesivamente.

¿Puedes nombrar otras tres fracciones que pertenecen a este conjunto? ($\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{9}{9}$, etc.)

E527

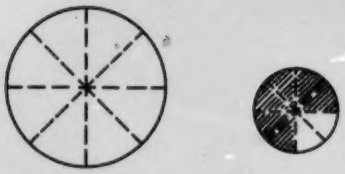
Conjunto de problemas 5

Copia cada una de las figuras siguientes:

1.

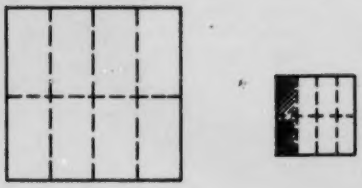
Colorea $\frac{2}{4}$ de esta figura. $\frac{2}{4}$ es otro nombre para $\frac{1}{2}$.

2.



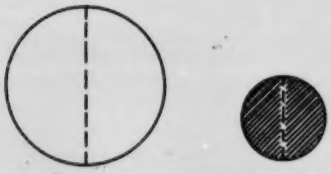
Colorea $\frac{6}{8}$ de esta figura. $\frac{6}{8}$ es otro nombre para $\frac{3}{4}$.

3.



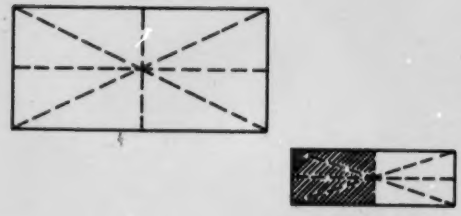
Colorea $\frac{2}{8}$ de esta figura. $\frac{2}{8}$ es otro nombre para $\frac{1}{4}$.

4.



Colorea $\frac{2}{2}$ de esta figura. $\frac{2}{2}$ es otro nombre para 1.

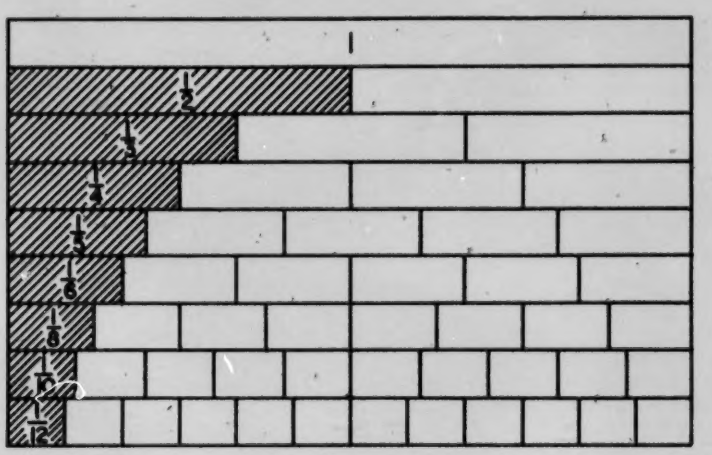
5.



Colorea $\frac{4}{8}$ de esta figura. $\frac{4}{8}$ es otro nombre para $\frac{1}{2}$.

E528

6. Utilizando la siguiente tabla, escribe tantos nombre como puedes para:



a) $\frac{1}{2}$ ($\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$)

b) $\frac{1}{3}$ ($\frac{2}{6}$, $\frac{4}{12}$)

c) $\frac{1}{4}$ ($\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$)

d) $\frac{1}{5}$ ($\frac{2}{10}$)

e) $\frac{4}{6}$ ($\frac{2}{3}$, $\frac{8}{12}$)

f) $\frac{6}{8}$ ($\frac{3}{4}$, $\frac{9}{12}$)

7. Escribe por lo menos otras tres fracciones que nombren cada uno de los siguientes números racionales; si puedes escribir más de tres, hazlo:

a) $\frac{1}{4}$ ($\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{16}$)

b) $\frac{2}{5}$ ($\frac{4}{10}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{8}{20}$)

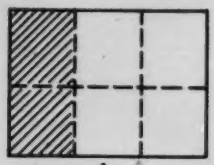
c) $\frac{5}{2}$ ($\frac{10}{4}$, $\frac{15}{6}$, $\frac{20}{8}$)

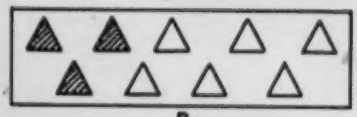
d) $\frac{2}{3}$ ($\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$)

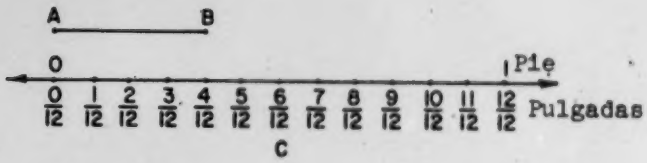
e) $\frac{3}{4}$ ($\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}$)

(Pueden admitirse varias otras fracciones)

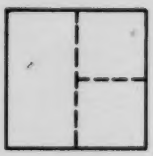
8. Los siguientes diagramas sugieren otros tres nombres para $\frac{1}{3}$. ¿Cuáles son? ($\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$)







9. Dibuja 5 cuadrados como los que se ven a continuación. Divide cada cuadrado para representar el enunciado matemático escrito al pie del mismo. El primer ejercicio se presenta como un ejemplo.



$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

E530

10. Completa los siguientes enunciados

a) $1 = \frac{2}{2}$

b) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

d) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

e) $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

f) $\frac{8}{8} = \frac{4}{4}$

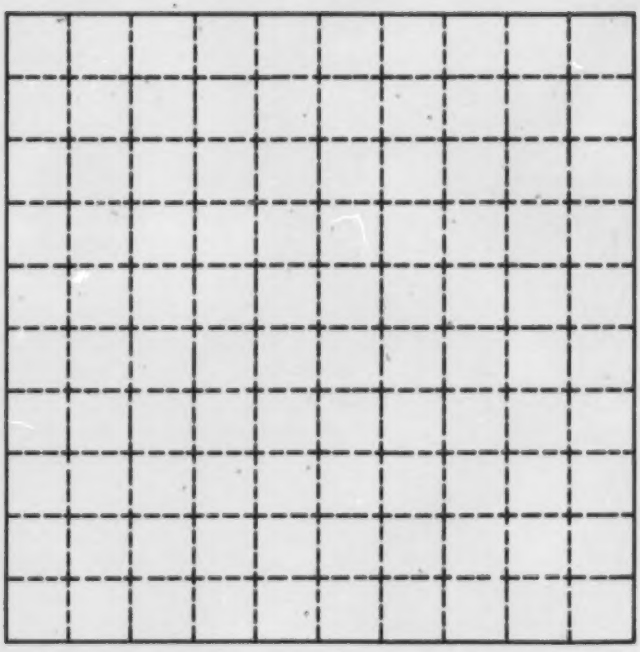
g) $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$

h) $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

i) $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

j) $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

11.



E531

El cuadrado unidad mostrado en la página anterior se ha dividido en 100 regiones cuadradas congruentes.

a) ¿Qué parte es cada región cuadrada pequeña de la región cuadrada unidad? ($\frac{1}{100}$)

b) ¿Qué parte es cada región cuadrada pequeña de una fila o una columna de regiones cuadradas? ($\frac{1}{10}$)

c) ¿Qué parte es cada fila o cada columna de regiones cuadradas, de la región cuadrada unidad? ($\frac{1}{10}$)

d) $\frac{4}{10} = \frac{?}{100}$ 40

e) $\frac{7}{10} = \frac{?}{100}$ 70

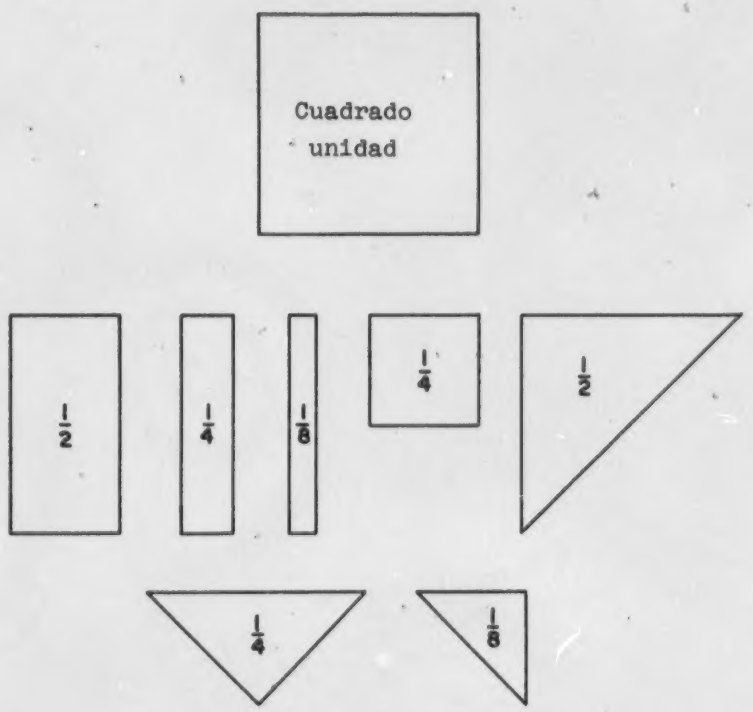
f) $\frac{90}{100} = \frac{?}{10}$ 9

g) $\frac{30}{100} = \frac{?}{10}$ 3

h) ¿Cuántas regiones cuadradas pequeñas deberías colorear, si has de colorear $\frac{47}{100}$ de la región cuadrada unidad?; (47) ¿$\frac{83}{100}$?; (83) ¿$\frac{100}{100}$?; (100) ¿$\frac{1}{10}$?; (10) ¿$\frac{7}{10}$?; (70) ¿y $\frac{10}{10}$? (100)

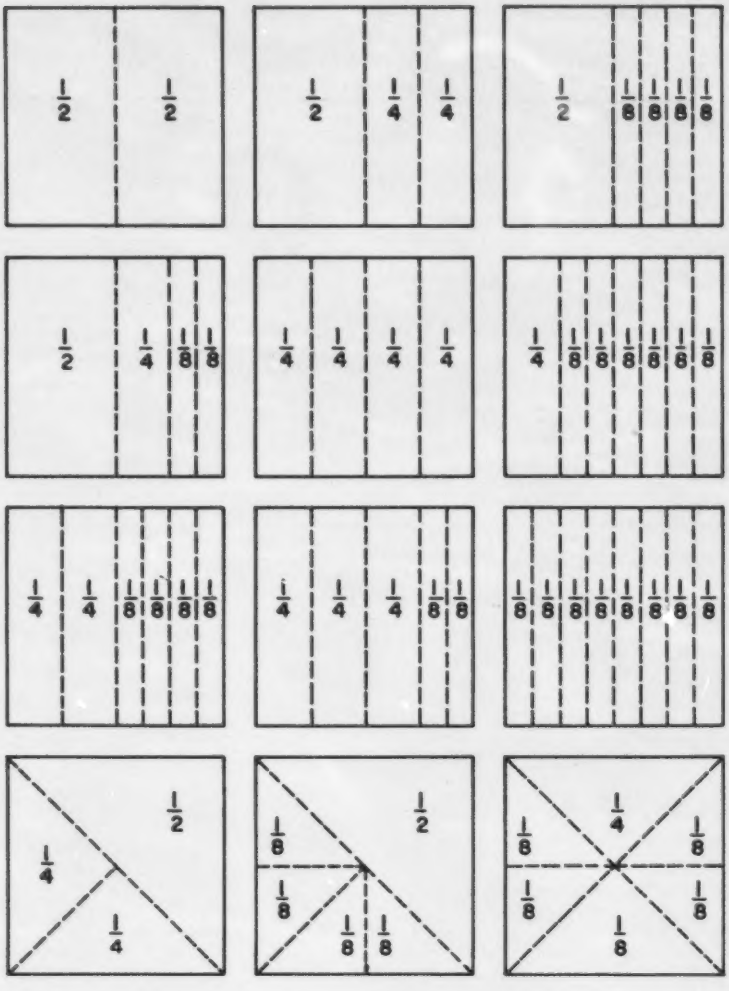
E532

Rompecabezas. ¿De cuántas maneras diferentes puedes cubrir el cuadrado unidad, usando los pedazos fraccionarios que se muestran? Cada pedazo puede usarse más de una vez. Quizás, quieras trazar, cortar y hacer varias copias de cada región modelo, antes de que trates de resolver el rompecabezas.



E533

He aquí algunas soluciones al rompecabezas de la página anterior. ¿Cuántas más descubriste?



ORDENACION DE LOS NUMEROS RACIONALES

Objetivos: Ayudar a los estudiantes a comprender que si conocen un número racional, no pueden nombrar el siguiente.

Enseñar a los estudiantes a ordenar un conjunto dado de números racionales en orden ascendente y en orden descendente.

Explicar y expresar las relaciones "menor que" y "mayor que" entre dos números racionales.

Materiales: Los materiales que se han empleado en las lecciones anteriores.

Sugerencias para la enseñanza:

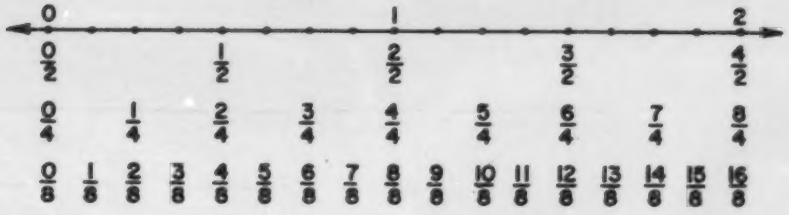
La base matemática para esta lección puede obtenerse de las lecciones anteriores. Probablemente, los alumnos ya se dan cuenta de que $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, etc. Utilizando la recta numérica o partes congruentes de una región dada, háganse algunas preguntas que conduzcan a los estudiantes a ordenar un conjunto dado de números racionales en orden ascendente. Por ejemplo, dado el conjunto $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}$, el conjunto ordenado podría ser $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$. Pídase que den el próximo número cardinal después de 5, después de 123, etc.

A continuación, pídase que den el próximo número racional después de $\frac{1}{2}$. Si dan la fracción $\frac{2}{2}$, pregúntese, por ejemplo, si $\frac{3}{4}$ está entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{2}$. Las preguntas que se hagan aquí deben poner de manifiesto la idea de que dado un número racional, no podemos conocer el próximo número racional.

E534

ORDENACION DE LOS NUMEROS RACIONALES

Exploración



Observa la recta numérica.

¿Está $\frac{1}{2}$ a la derecha de $\frac{1}{4}$? (sí) ¿Es $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$? (sí)

¿Está $\frac{3}{4}$ a la derecha de $\frac{3}{8}$? (sí) ¿Es $\frac{3}{4} > \frac{3}{8}$? (sí)

¿Está $\frac{5}{4}$ a la derecha de $\frac{4}{2}$? (no) ¿Es $\frac{5}{4} > \frac{4}{2}$? (no)

¿Está 0 a la izquierda de $\frac{1}{4}$? (sí) ¿Es $0 < \frac{1}{4}$? (sí)

¿Está $\frac{2}{4}$ a la izquierda de $\frac{4}{2}$? (sí) ¿Es $\frac{2}{4} < \frac{4}{2}$? (sí)

¿Está $\frac{5}{8}$ a la izquierda de $\frac{6}{8}$? (sí) ¿Es $\frac{5}{8} < \frac{6}{8}$? (sí)

Es fácil ver que $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{4}$ y $\frac{8}{4}$ están ordenados de menor a mayor.

¿Están $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{4}$ y $\frac{4}{2}$ ordenados de menor a mayor? (sí)

Sería más fácil decidir, si usamos otras fracciones para estos números.

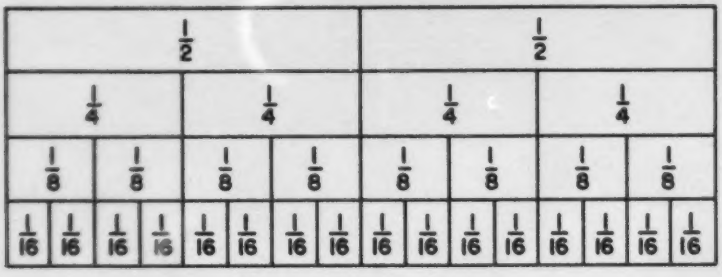
Usando otros nombres para estos mismos números, podemos escribirlos en la forma $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{10}{8}$ y $\frac{16}{8}$.

Ahora vemos que los números se nombraron en orden creciente, es decir, de menor a mayor.

Según te mueves hacia la derecha a lo largo de una recta numérica, los números racionales van siendo mayores. Según te mueves hacia la izquierda, van siendo menores.

Conjunto de problemas 6

1. Utiliza esta tabla y los símbolos > y < para completar los enunciados siguientes:



a) $\frac{1}{2}$ ___>___ $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{8}$ ___>___ $\frac{1}{4}$ e) $\frac{3}{4}$ ___>___ $\frac{5}{8}$

b) $\frac{1}{8}$ ___<___ $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ ___>___ $\frac{3}{8}$ f) $\frac{3}{8}$ ___<___ $\frac{2}{4}$

2. Escribe la respuesta correcta. Se puede utilizar la tabla de fracciones de arriba, si se necesita.

a) ¿Qué número es menor, $\frac{17}{8}$ ó $\frac{16}{8}$? $(\frac{16}{8})$
¿Cuál está más a la izquierda en la recta numérica? $(\frac{16}{8})$

b) ¿Qué número es menor, $\frac{10}{8}$ ó $\frac{12}{8}$? $(\frac{10}{8})$
¿Cuál está más a la izquierda en la recta numérica? $(\frac{10}{8})$

c) ¿Qué número es menor, $\frac{17}{8}$ ó $\frac{15}{8}$? $(\frac{15}{8})$
¿Cuál está más a la izquierda en la recta numérica? $(\frac{15}{8})$

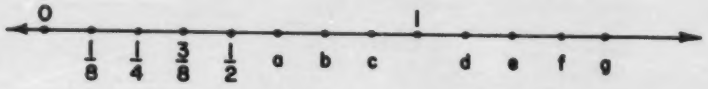
d) ¿Qué número es menor, $\frac{11}{4}$ ó $\frac{4}{2}$? $(\frac{4}{2})$
¿Cuál está más a la izquierda en la recta numérica? $(\frac{4}{2})$

3. Dispón los miembros de cada conjunto en orden creciente o de menor a mayor. Haz diagramas si los necesitas.

$A = \{\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}, \frac{5}{2}\}$ $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2})$

$B = \{\frac{7}{4}, \frac{3}{4}, 2, \frac{9}{4}, \frac{11}{4}\}$ $(\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, 2, \frac{9}{4}, \frac{11}{4})$

4. Asocia un número racional con cada uno de los puntos a, b, c, d, e, f y g en el diagrama siguiente:



$a = \frac{5}{8}$ $c = \frac{7}{8}$ $e = \frac{5}{4}$ $g = \frac{6}{4}$

$b = \frac{2}{4}$ $d = \frac{9}{8}$ $f = \frac{11}{4}$

5. Escribe en orden creciente los números usados al contar de dos tercios en dos tercios, desde $\frac{2}{3}$ hasta 4.
$(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{6}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{12}{3})$

6. Escribe en orden creciente los números usados al contar de tres medios en tres medios, desde $\frac{3}{2}$ hasta 9.
$(\frac{3}{2}, \frac{6}{2}, \frac{9}{2}, \frac{12}{2}, \frac{15}{2}, \frac{18}{2})$

7. Escribe otros dos nombres para cada uno de los siguientes números:

a) $\frac{12}{8}$ $(\frac{6}{4}, \frac{3}{2})$

b) $\frac{5}{2}$ $(\frac{10}{4}, \frac{15}{6})$

c) $\frac{10}{4}$ $(\frac{5}{2}, \frac{20}{8})$

d) 3 $(\frac{6}{2}, \frac{9}{3})$

E537

8. Copia y completa, escribiendo el símbolo > o < en cada encasillado:

a) $\frac{1}{4} \underline{<} \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2} \underline{>} \frac{1}{8}$

c) $\frac{1}{10} \underline{<} 1$

d) $1 \underline{>} \frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{4} \underline{>} \frac{1}{8}$

f) $\frac{1}{6} \underline{<} \frac{1}{3}$

9. En cada uno de los siguientes ejercicios, dispón en orden creciente los números dados:

a) $\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}$ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right)$

b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

c) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right)$

d) $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{5}$ $\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{5}\right)$

10. Dispón en orden decreciente los números en cada uno de los siguientes conjuntos; empieza con los más grandes:

$A = \{\frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\}$ $\left(\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}\right)$

$B = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}\}$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$

$C = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}\}$ $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$

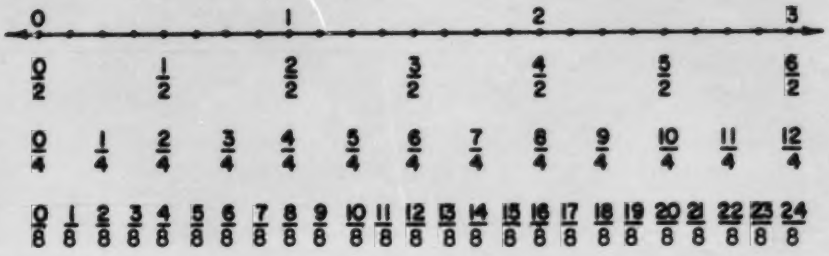
11. Dispón los siguientes números en orden creciente:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}.$ $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

E538

Conjunto de problemas 7

Ejercicios suplementarios



1. Copia y escribe $>$, $<$, o $=$ en cada espacio en blanco para que resulte un enunciado cierto. La recta numérica anterior te servirá de ayuda.

a) $\frac{5}{4} \underline{>} \frac{1}{2}$

b) $\frac{8}{4} \underline{=} 2$

c) $3 \underline{=} \frac{6}{2}$

d) $\frac{3}{2} \underline{>} \frac{3}{4}$

e) $\frac{2}{2} \underline{=} 1$

f) $\frac{3}{4} \underline{>} \frac{5}{8}$

g) $\frac{7}{4} \underline{>} \frac{11}{8}$

h) $\frac{18}{8} \underline{>} \frac{8}{4}$

E539

2. En cada uno de los siguientes ejercicios, determina qué fracción está a la derecha de la otra en la recta numérica:

a) $\frac{19}{8}$ y $\frac{17}{8}$ $\left(\frac{19}{8}\right)$

b) $\frac{11}{5}$ y $\frac{5}{4}$ $\left(\frac{11}{5}\right)$

c) $\frac{5}{2}$ y $\frac{18}{8}$ $\left(\frac{5}{2}\right)$

d) $\frac{10}{2}$ y $\frac{5}{2}$ $\left(\frac{10}{2}\right)$

e) $\frac{14}{8}$ y $\frac{6}{4}$ $\left(\frac{14}{8}\right)$

f) $\frac{11}{4}$ y $\frac{4}{2}$ $\left(\frac{11}{4}\right)$

g) $\frac{5}{4}$ y $\frac{3}{2}$ $\left(\frac{3}{2}\right)$

h) $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

3. Escribe los números en orden creciente:

A = $\{\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{11}{2}, \frac{5}{2}\}$ $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$

B = $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}\}$ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

4. Copia y llena cada espacio en blanco con el símbolo $>$, $<$, o $=$:

a) $\frac{3}{3} > \frac{1}{3}$

b) $2 > \frac{4}{3}$

c) $\frac{4}{4} = 1$

d) $\frac{4}{5} > \frac{2}{5}$

e) $1 < 2$

f) $\frac{3}{3} = \frac{2}{2}$

g) $2 > \frac{7}{4}$

h) $\frac{1}{2} < 1$

5. Examina el ejercicio 4. ¿Qué fracción en cada par designa un punto más a la derecha en la recta numérica?

a. $\frac{3}{3}$

b. 2

c. el mismo punto

d. $\frac{4}{5}$

e. 2

f. el mismo punto

g. 2

h. 1

UNA NUEVA CLASE DE NOMBRES

Objetivo: Mostrar que es conveniente utilizar la forma mixta, cuando el número racional es mayor que 1.

Materiales: La recta numérica y regiones congruentes

Sugerencias para la enseñanza:

Repásese la lección en que se consideraron los números racionales mayores que uno, observando cómo utilizamos una fracción para nombrar un número mayor que 1.

Entonces, háganse enunciados como los siguientes:

Tomás recorrió $\frac{3}{2}$ millas en su bicicleta.

La mamá de María dio a sus invitados $\frac{10}{6}$ pasteles en la comida.

Me gustaría que alguien me diera un trozo de cordón de $\frac{4}{3}$ yardas de largo.

Pídase a los alumnos que comenten acerca de esos enunciados. Pregúntese si hay una manera más conveniente de redactar esos enunciados, es decir, si $\frac{3}{2}$, $\frac{10}{6}$ y $\frac{4}{3}$ pueden expresarse como un número cardinal de unidades y partes de unidades.

Los alumnos podrían sugerir lo siguiente:

Tomás recorrió $1\frac{1}{2}$ millas en su bicicleta.

La mamá de María dio a sus invitados $1\frac{4}{6}$ pasteles.

Me gustaría que alguien me diera un trozo de cordón de $1\frac{1}{3}$ yardas de largo.

Pregúntese, luego: Si conocemos una fracción que representa un número racional, ¿cómo podemos expresar éste, utilizando unidades enteras y partes de unidades?

$1\frac{1}{2}$, $1\frac{4}{6}$, etc., son lo que llamamos <u>formas mixtas</u>. Entonces, pregúntese: Si Tomás recorrió $\frac{3}{2}$ millas en su bicicleta, ¿recorrió tanto como una milla?; ¿más de una milla?; ¿tanto como dos millas?; etc. "¿Es un trozo de cuerda de $\frac{4}{3}$ yarda tan largo como una

yarda?; ¿tan largo como dos yardas?; etc. Esto ayudará a los alumnos a darse cuenta de la relación entre los números racionales representados por fracciones y números cardinales.

E540

UNA NUEVA CLASE DE NOMBRES

Las siguientes figuras nos ayudan a pensar acerca de los números $\frac{3}{2}$ y $\frac{11}{4}$.

A.

Unidad

Unidad

B.

Unidad

Unidad

Unidad

$\frac{3}{2} = \frac{2}{2}$ y $\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}$ = 1 uno y 1 mitad

o

$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

$\frac{11}{4} = \frac{4}{4}$ y $\frac{4}{4}$ y $\frac{3}{4}$

$\frac{11}{4}$ = 1 uno y 1 uno y tres cuartos

$\frac{11}{4}$ = 2 unos y tres cuartos

o

$\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

Otra manera de nombrar $\frac{3}{2}$ es $1\frac{1}{2}$.

Otra manera de nombrar $\frac{11}{4}$ es $2\frac{3}{4}$.

Llamamos a $1\frac{1}{2}$ y $2\frac{3}{4}$ formas mixtas.

E541

Los números racionales nombrados por fracciones como $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{8}$ nos dicen que la medida de una región, segmento o conjunto es <u>menor</u> que 1.

Los números racionales nombrados por fracciones como $\frac{2}{2}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{4}{4}$ y $\frac{3}{3}$ nos dicen que la medida de una región, segmento o conjunto es <u>igual</u> a 1.

Los números racionales nombrados por fracciones como $\frac{7}{4}$, $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{3}$ nos dicen que la medida de una región, segmento o conjunto es <u>mayor</u> que 1.

Otros nombres para 1 son $\frac{4}{4}$, $\frac{2}{2}$ y $\frac{3}{3}$.

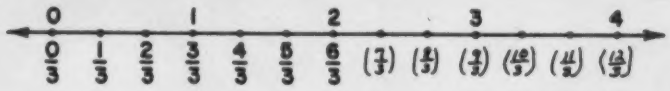
Puesto que esto es cierto, otros nombres para $\frac{7}{4}$, $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{3}$ pueden ser $1\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}$ y $1\frac{2}{3}$.

$1\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$ se leen: "uno y tres cuartos", "uno y un medio", "uno y dos tercios". Las fracciones escritas en esta forma se dice que están en <u>forma mixta</u>.

E542

Conjunto de problemas 8

1. Copia y completa la recta numérica siguiente; luego, úsala para completar los enunciados matemáticos, de manera que cada uno sea un enunciado cierto:



a) $\frac{4}{3} = \frac{3}{3}$ y $\frac{1}{3}$

$\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

b) $\frac{6}{3}$ es $\frac{3}{3}$ y $\frac{3}{3}$

$\frac{6}{3} = 2$

c) $\frac{11}{3} = 3$ unos y $\frac{2}{3}$

$\frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$

d) $2\frac{2}{3} = 2$ y $\frac{2}{3}$

$2\frac{2}{3} = \frac{6}{3}$ y $\frac{2}{3}$

$2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

e) $4 = \frac{12}{3}$

f) $3\frac{1}{3} = \frac{9}{3}$ y $\frac{1}{3}$

$3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

2. Dispón los números de cada uno de los siguientes conjuntos en orden creciente; usa diagramas, si los necesitas:

$A = \{\frac{3}{4}, 0, \frac{7}{4}, 2, \frac{9}{4}, 1\}$ $(0, \frac{3}{4}, 1, \frac{7}{4}, 2, \frac{9}{4})$

$B = \{\frac{5}{3}, 1, \frac{10}{3}, 4, \frac{7}{3}, 2, \frac{2}{3}, 3\}$

$(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, 3, \frac{10}{3}, 4)$

3. Pedro tiene que caminar 13 bloques hasta la escuela. Cada bloque tiene $\frac{1}{10}$ de milla de largo. ¿Cuántas millas tiene que caminar hasta la escuela? ($\frac{13}{10}$ o $1\frac{3}{10}$ millas)

4. Una libra de mantequilla generalmente está dividida en cuatro barras del mismo tamaño. Victoria encontró 7 barras de mantequilla en su nevera. ¿Cuántas libras de mantequilla había en la nevera? ($\frac{7}{4}$ ó $1\frac{3}{4}$ libras)

¿Puedes hacer los siguientes problemas sin ninguna ayuda? Trata algunos de ellos.

5. Escribe la forma mixta para cada uno de los números siguientes:

a) $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

b) $\frac{6}{2} = 3$

c) $\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$

d) $\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$

e) $\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$

f) $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

6. ¿Cuál es mayor? Escribe el nombre del número mayor en cada par. Puedes usar una recta numérica como ayuda auxiliar.

a) $\frac{5}{3}$ ó $1\frac{1}{2}$ $(\frac{5}{3})$

b) $2\frac{3}{4}$ ó $\frac{10}{4}$ $(2\frac{3}{4})$

c) $\frac{12}{3}$ ó $3\frac{7}{8}$ $(\frac{12}{3})$

d) 6 ó $\frac{21}{3}$ $(\frac{21}{3})$

e) $\frac{8}{7}$ ó $1\frac{1}{8}$ $(\frac{8}{7})$

f) $3\frac{1}{6}$ ó $\frac{5}{2}$ $(3\frac{1}{6})$

g) $4\frac{2}{3}$ ó $\frac{31}{10}$ $(4\frac{2}{3})$

h) $1\frac{3}{4}$ ó $\frac{8}{4}$ $(\frac{8}{4})$

7. Copia y completa; usa diagramas, si los necesitas:

a) $1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$

b) $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

c) $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

d) $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

e) $1\frac{5}{6} = \frac{11}{6}$

f) $2\frac{3}{8} = \frac{19}{8}$

8. ¿Entre qué dos números cardinales en la recta numérica estarían las siguientes fracciones?

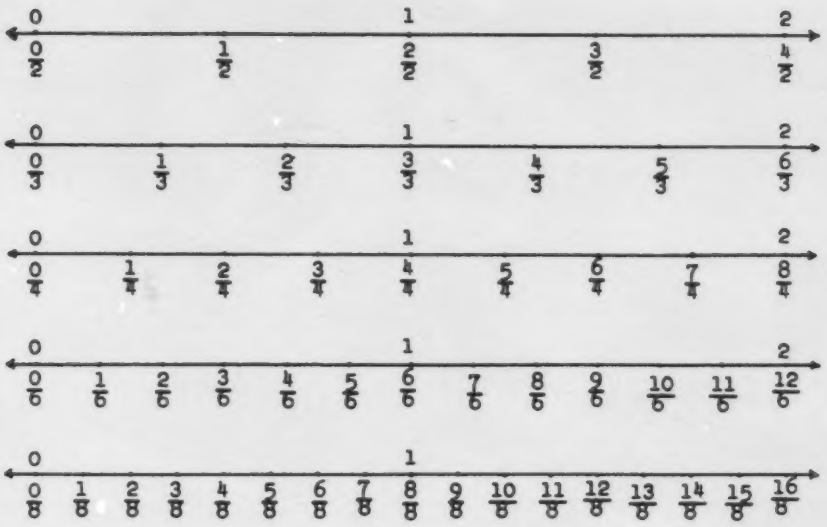
a) $5\frac{1}{3}$ (5 y 6)

b) $2\frac{3}{4}$ (2 y 3)

c) $7\frac{1}{2}$ (7 y 8)

d) $6\frac{9}{10}$ (6 y 7)

Conjunto de problemas 9



1. Utiliza la recta numérica anterior. Copia los siguientes enunciados matemáticos y escribe el símbolo > o < en cada espacio en blanco, para hacer el enunciado cierto:

a) $\frac{10}{8}$ < $\frac{12}{8}$

b) 2 > $\frac{3}{4}$

c) $\frac{5}{6}$ < 1

d) $\frac{3}{2}$ > $\frac{5}{4}$

e) $\frac{3}{6}$ < $\frac{9}{8}$

f) $\frac{8}{8}$ < $\frac{4}{3}$

g) $\frac{17}{4}$ > $\frac{11}{8}$

h) $\frac{4}{3}$ > $\frac{7}{6}$

E545

2. Comenzando con cero, escribe en orden los números empleados al contar de:

   a) mitades en mitades hasta $\frac{4}{2}$ $(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2})$

   b) dos tercios en dos tercios hasta $\frac{6}{3}$ $(0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{6}{3})$

   c) tres octavos en tres octavos hasta $\frac{15}{8}$ $(0, \frac{3}{8}, \frac{6}{8}, \frac{9}{8}, \frac{12}{8}, \frac{15}{8})$

3. Escribe otros dos nombres para cada uno de los siguientes:

   a) $\frac{1}{2} =$ $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$

   b) $1 =$ $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$

   c) $1\frac{1}{4} =$ $\frac{5}{4}$, $\frac{10}{8}$

   d) $2\frac{1}{2} =$ $\frac{5}{2}$, $\frac{10}{4}$

(Hay varios otros nombres.)

4. Aparea cada número racional de la columna 1 con una fracción que nombra el mismo número de la columna 2:

Columna 1		Columna 2	
a)	$\frac{1}{2}$ (h)	f)	$\frac{8}{4}$
b)	$\frac{1}{4}$ (j)	g)	$\frac{6}{4}$
c)	2 (f)	h)	$\frac{2}{4}$
d)	$1\frac{1}{2}$ (g)	i)	$\frac{2}{2}$
e)	1 (i)	j)	$\frac{2}{8}$

USO DE LOS NUMEROS RACIONALES

Objetivos: Recordar que se utilizaron conjuntos de objetos y sus subconjuntos equivalentes para sugerir números racionales.

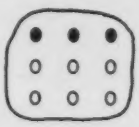
Aprender cómo podemos utilizar un número racional para expresar una relación entre el número de miembros de un conjunto y el número de miembros de un subconjunto.

Materiales: Colecciones de objetos que pueden disponerse en conjuntos y subconjuntos.

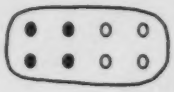
Sugerencias para la enseñanza:

Utilícense algunos conjuntos de objetos. Elíjase un subconjunto particular dentro de un conjunto. Pregúntese qué número racional sugiere el subconjunto.

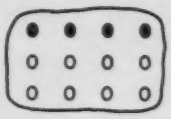
Por ejemplo,



$\frac{3}{9}$ ó $\frac{1}{3}$



$\frac{4}{8}$ ó $\frac{1}{2}$



$\frac{4}{12}$ ó $\frac{1}{3}$

Entonces, indíquese cómo podemos utilizar el número racional para hablar acerca del número de miembros del conjunto y el número de miembros de un subconjunto.

Ilústrese con ejemplos.

Podemos decir:

3 objetos son $\frac{1}{3}$ de 9 objetos.

4 objetos $\frac{4}{8}$ (ó $\frac{1}{2}$) de 8 objetos.

4 objetos son $\frac{4}{12}$ (ó $\frac{1}{3}$) de 12 objetos, etc.

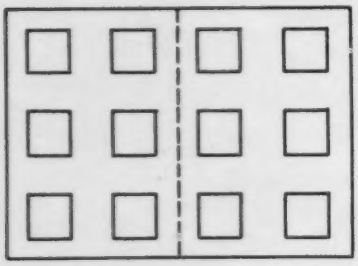
Utilícense la Exploración y los Conjuntos de problemas del Texto del estudiante.

E546

USO DE LOS NUMEROS RACIONALES

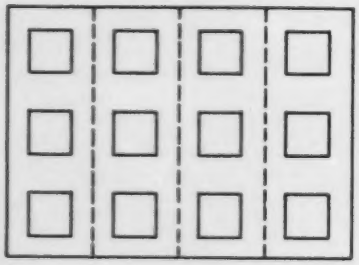
Exploración

A continuación, se representan varios conjuntos de 12 objetos.



Conjunto A

Las rectas de trazos dividen la figura del conjunto A en dos subconjuntos.
¿Cuántos objetos hay en un subconjunto? (6)
¿Cuántos objetos hay en dos subconjuntos? (12)
¿Es $\frac{1}{2}$ de 12 objetos igual a 6 objetos? (Sí)
¿Es $\frac{2}{2}$ de 12 objetos igual a 12 objetos? (Sí)



Conjunto B

El conjunto B se dividió en 4 subconjuntos.
¿Cuántos objetos hay en cada subconjunto? (3)

$\frac{1}{4}$ de 12 = 3

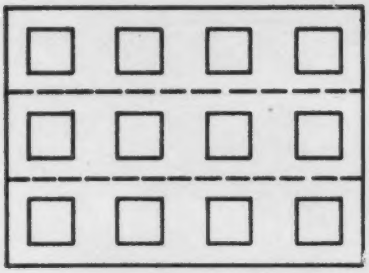
$\frac{2}{4}$ de 12 = 6

$\frac{3}{4}$ de 12 = 9

$\frac{4}{4}$ de 12 = 12

¿Es $\frac{1}{2}$ de 12 = $\frac{2}{4}$ de 12? (Sí)

E547



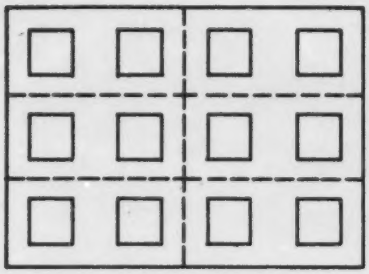
Conjunto C

Las rectas de trazas dividen el conjunto C en 3 subconjuntos.

¿Qué es $\frac{1}{3}$ de 12? (4)

¿Qué es $\frac{2}{3}$ de 12? (8)

¿Qué es $\frac{3}{3}$ de 12? (12)



Conjunto D

El conjunto D se dividió en 6 subconjuntos.

$2 = \frac{1}{6}$ de 12.

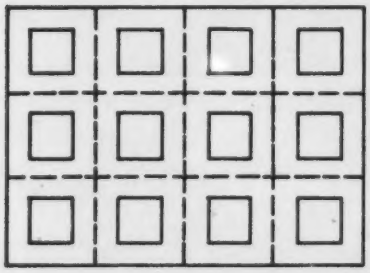
$4 = \frac{2}{6}$ de 12.

$6 = \frac{3}{6}$ de 12.

$8 = \frac{4}{6}$ de 12.

$10 = \frac{5}{6}$ de 12.

$12 = \frac{6}{6}$ de 12.



Conjunto E

Cada subconjunto en E representa $\frac{1}{12}$ de 12.

$\frac{3}{12}$ de 12 = 3

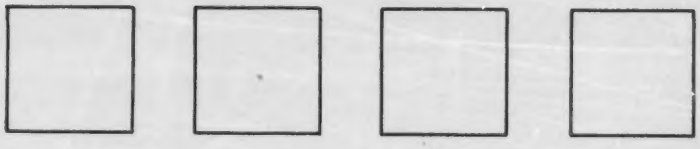
$\frac{4}{12}$ de 12 = 4

$\frac{6}{12}$ de 12 = 6

$\frac{8}{12}$ de 12 = 8

$\frac{9}{12}$ de 12 = 9

Conjunto de problemas 10



1. A, B, C y D son regiones cuadradas unidad. Cópialas en tu hoja de papel. Divide cada una en cuatro regiones iguales.

   a) Colorea de rojo $\frac{1}{4}$ de A.

   b) Colorea de azul $\frac{2}{4}$ de B.

   c) Colorea de verde $\frac{3}{4}$ de C.

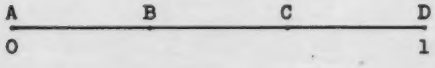
   d) Colorea de verde $\frac{4}{4}$ de D.

   e) $\frac{4}{4}$ es otro nombre para (1).

   f) Escribe la fracción que mejor describe las regiones no coloreadas de cada región cuadrada unidad anterior.

   (a. $\frac{3}{4}$ c. $\frac{1}{4}$
   b. $\frac{2}{4}$ d. $\frac{0}{4}$)

2.



Los puntos B y C dividen el segmento de recta unidad AD en 3 segmentos congruentes.

a) m $\overline{AB}$ = $(\frac{1}{3})$

b) m $\overline{AC}$ = $(\frac{2}{3})$

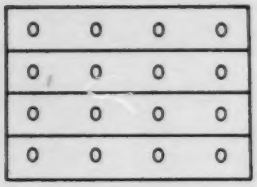
c) m $\overline{AD}$ = $(\frac{3}{3})$

d) $\frac{3}{3}$ = (1)

E549

Conjunto de problemas 11

1. Examina la siguiente representación de un conjunto de objetos:

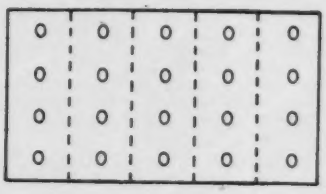


Se dividió en cuatro subconjuntos.
En cada subconjunto, hay el mismo número de objetos.

¿Qué es $\frac{1}{4}$ de 16? (4) ¿Qué es $\frac{3}{4}$ de 16? (12)

¿Qué es $\frac{2}{4}$ de 16? (8) ¿Qué es $\frac{4}{4}$ de 16? (16)

2. He aquí otra figura de un conjunto de objetos. Se dividió en cinco subconjuntos. En cada subconjunto, hay el mismo número de objetos.



¿Qué es $\frac{1}{5}$ de 20? (4)

¿Qué es $\frac{2}{5}$ de 20? (8)

¿Qué es $\frac{3}{5}$ de 20? (12)

¿Qué es $\frac{4}{5}$ de 20? (16)

¿Qué es $\frac{5}{5}$ de 20? (20)

E550

3. Completa lo siguiente; utiliza conjuntos de objetos, si los necesitas:

a) $\frac{1}{3}$ de 6 es (2)

b) $\frac{1}{2}$ de 4 es (2)

c) $\frac{1}{4}$ de 8 es (2)

d) $\frac{1}{2}$ de 10 es (5)

e) $\frac{2}{3}$ de 6 es (4)

f) $\frac{3}{4}$ de 8 es (6)

g) $\frac{2}{3}$ de 9 es (6)

h) $\frac{2}{5}$ de 10 es (4)

4. Juana compró seis rosquillas. Se comió $\frac{1}{3}$ de ellas. ¿Cuántas rosquillas se comió? ¿Cuántas le sobraron? (Se comió 2 rosquillas y le sobraron cuatro.)

5. Guillermo tenía 20 bolitas. Perdió $\frac{1}{4}$ de ellas. ¿Cuántas bolitas perdió? ¿Cuántas le quedaron? (Perdió 5 bolitas y le sobraron 15.)

6. Alicia tenía 36 trozos de cinta. Le vendió $\frac{1}{4}$ de ellos a María. ¿Cuántos trozos de cinta vendió Alicia? ¿Cuántos le quedaron? (Vendió 9 trozos de cinta y le quedaron 27.)

7. En el camino desde la tienda, a Roberto se le cayó una caja que contenía una docena de huevos. Miró al interior de la caja y encontró $\frac{3}{4}$ de los huevos rotos. ¿Cuántos huevos hay en una docena? (12) ¿Cuántos huevos se rompieron? ¿Cuántos huevos no se rompieron? (Se rompieron 9 huevos y quedaron 3.)

PROBLEMA DIFICIL

Juan le dio a Guillermo dieciséis almendras. Esto era $\frac{1}{2}$ del número que Juan tenía. ¿Cuántas tenía Juan al principio? (Juan tenía 32 almendras al principio.)

E551

Conjunto de problemas 12

1. Había 20 problemas en un examen de aritmética. Juan los resolvió todos con excepción de $\frac{1}{4}$ de ellos. ¿Cuántos problemas resolvió Juan? (15)

2. $\frac{1}{3}$ de una hilera de 12 luces de árboles de Navidad se quemaron. ¿Cuántas luces tuvieron que ser remplazadas? (4)

3. En una venta, libros cuyo precio había sido 50¢ se estaban vendiendo por $\frac{1}{2}$ del precio regular. ¿Cuál era el precio de venta? (25¢)

4. Una caja que originalmente contenía 24 barras de dulce, estaba llena hasta las dos terceras partes. ¿Cuántas barras de dulce había en la caja? (16)

5. Un partido de fútbol se juega en 4 partes. Si se emplea una hora de tiempo para el partido, ¿cuántos minutos de juego habrán transcurrido al final de la tercera parte? (45 minutos)

6. Había 6 niños y 3 niñas en un equipo. ¿Qué parte del equipo eran niños? ($\frac{6}{9}$ ó $\frac{2}{3}$)

7. El año está dividido en cuatro estaciones de igual duración. ¿Qué parte del año es cada estación? ($\frac{1}{4}$)

8. María tiene una colección de 15 muñecas y $\frac{2}{3}$ de ellas representan niñas de otros países. ¿Cuántas de las muñecas representan niñas de otros países? (10)

9. Jaime estaba haciendo un modelo de un avión. Necesitaba un solo pedazo de madera de $\frac{3}{4}$ pie de largo. Tenía un pedazo de madera de 8 pulgadas de largo. ¿Podía usar este pedazo? (no) ¿Por qué? (Necesita $\frac{3}{4}$ de un pie, o sea, 9 pulgadas.)

E552

Ejercicios de práctica

1. Coloca paréntesis correctamente para hacer cada uno de los siguientes un enunciado cierto; el ejercicio a) se presenta como un ejemplo:

a) $(6 + 4) \times 3 = 30$

b) $(8 \times 3) + 5 < 64$

c) $(6 + 3) \times 6 > 24$

d) $2 \times (5 + 4) = 18$

e) $4 \times (16 + 4) > 68$

f) $9 + (6 + 3) = 11$

g) $8 \times (5 + 3) \neq 43$

h) $(6 + 3) \times 4 = 8$

i) $(18 + 6) + 3 \neq 2$

j) $(14 + 7) + 7 > 1$

k) $(5 \times 8) - 2 > 30$

l) $(25 + 5) + 8 = 13$

m) $19 + (8 + 2) > 14$

n) $45 + (5 + 4) < 13$

o) $(27 + 3) + 6 = 5$

p) $28 - (7 \times 3) < 63$

q) $(46 + 8) + 9 = 6$

r) $28 + (21 + 7) \neq 7$

s) $17 - (4 \times 3) < 39$

t) $(49 + 7) + 6 = 13$

2. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $327 + 54 = 381$

b) $457 + 218 = 675$

c) $384 + 291 = 675$

d) $384 - 156 = 228$

e) $995 - 768 = 227$

f) $870 - 418 = 452$

g) $2384 - 1963 = 421$

h) $1066 - 883 = 183$

i) $984 + 168 = 1152$

j) $700 - 362 = 338$

k) $1478 + 2388 = 3866$

l) $400 + 583 + 324 = 1307$

m) $1637 - 537 = 1100$

n) $709 - 368 = 341$

o) $37 + 31 + 36 = 104$

p) $801 - 513 = 288$

q) $745 - 508 = 237$

r) $678 + 254 = 932$

s) $2900 - 1256 = 1644$

t) $598 + 303 + 81 = 982$

E553

3. Escribe el número que n representa:

a)	29 + 56 + 37 = n	n = 122	k)	n = 737 × 8	n = 5896
b)	700 - 347 = n	n = 353	l)	n + 304 + 488 = 1640	n = 848
c)	43 × 6 = n	n = 258	m)	4767 = n × 7	n = 681
d)	587 - n = 369	n = 218	n)	719 - n = 285	n = 434
e)	77 + 94 + n = 237	n = 66	o)	8789 + n = 12497	n = 3708
f)	n × 6 = 3708	n = 618	p)	707 × 6 = n	n = 4242
g)	48 + n + 79 = 234	n = 107	q)	8789 - n = 5081	n = 3708
h)	n = 127 × 5	n = 635	r)	489 + 403 + 950 = n	n = 1842
i)	746 - n = 413	n = 333	s)	n × 9 = 7857	n = 873
j)	624 + n = 1141	n = 517	t)	n - 658 = 758	n = 1416

4. Efectúa las siguientes operaciones:

a)	1414 - 671 = 743	k)	278 + 32 + 49 = 359
b)	2157 + 879 = 3036	l)	378 ÷ 6 = 63
c)	148 ÷ 4 = 37	m)	439 × 5 = 2195
d)	367 × 6 = 2202	n)	679 - 327 = 352
e)	459 ÷ 9 = 51	o)	136 ÷ 4 = 34
f)	309 + 487 + 648 = 1444	p)	810 + 652 + 934 = 2396
g)	475 - 367 = 108	q)	333 × 7 = 2331
h)	280 ÷ 7 = 40	r)	652 - 584 = 68
i)	396 × 7 = 2272	s)	444 ÷ 6 = 74
j)	1209 - 688 = 521	t)	876 × 4 = 3504

5. Escribe el número que n representa:

a) $\frac{1}{2}$ de $12 = n$ $n = 6$

b) $\frac{1}{3}$ de $15 = n$ $n = 5$

c) $\frac{1}{4}$ de $8 = n$ $n = 2$

d) $\frac{1}{9}$ de $9 = n$ $n = 1$

e) $\frac{1}{5}$ de $20 = n$ $n = 4$

f) $\frac{1}{6}$ de $18 = n$ $n = 3$

g) $\frac{2}{3}$ de $9 = n$ $n = 6$

h) $\frac{3}{4}$ de $8 = n$ $n = 6$

i) $\frac{2}{5}$ de $10 = n$ $n = 4$

j) $\frac{1}{8}$ de $16 = n$ $n = 2$

k) $\frac{4}{5}$ de $15 = n$ $n = 12$

l) $\frac{3}{8}$ de $16 = n$ $n = 6$

6. Reagrupando, determina el sumando desconocido.

Ejemplo:

$$462 = 400 + 60 + 2 = 400 + 50 + 12$$
$$-157 = 100 + 50 + 7 = 100 + 50 + 7$$
$$300 + 00 + 5 = 305$$

a) $609 - 362 = 247$

b) $633 - 563 = 70$

c) $386 - 219 = 167$

d) $890 - 437 = 453$

e) $638 - 394 = 244$

f) $853 - 628 = 225$

g) $493 - 316 = 177$

h) $761 - 257 = 504$

i) $780 - 333 = 447$

j) $956 - 247 = 709$

E555

7. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $72 \div 8 = 9$

b) $789 \times 5 = 3945$

c) $725 \div 5 = 145$

d) $864 \times 6 = 5184$

e) $408 \div 4 = 102$

f) $904 \times 7 = 6328$

g) $824 \div 4 = 206$

h) $496 \times 6 = 2976$

i) $654 \div 3 = 218$

j) $730 \times 9 = 6570$

k) $378 \div 3 = 126$

l) $257 \times 4 = 1028$

m) $2488 \div 8 + 311$

n) $319 \times 8 = 2552$

o) $580 \div 5 = 116$

p) $509 \times 7 = 5663$

q) $789 \div 3 = 263$

r) $156 \times 9 = 1404$

s) $217 \div 7 = 31$

t) $697 \times 3 = 2091$

8. En cada espacio en blanco, escribe el numeral que hace cada enunciado cierto. El ejercicio a) se presenta como ejemplo.

a) $(\underline{4} \div 2) \times 9 = 18$

b) $(7 \times \underline{9}) - 29 = 34$

c) $(8 \times 8) - \underline{14} = 50$

d) $(12 \times 6) - 65 = \underline{7}$

e) $(\underline{6} \times 8) - 39 = 9$

f) $(4 \times \underline{6}) + 6 = 30$

g) $(6 \times 6) - \underline{22} = 14$

h) $(54 - 47 \times \underline{7} = 49$

i) $(11 - 5) \times 9 = \underline{54}$

j) $(8 + 20) - \underline{14} = 14$

k) $(\underline{9} \times 4) + 8 = 44$

l) $(6 \times \underline{6}) - 15 = 21$

m) $(7 \times 8) + 16 = \underline{72}$

n) $(8 \times \underline{5}) - 12 = 28$

o) $(7 \times 9) + 12 = \underline{75}$

p) $(5 \times \underline{7}) - 14 = 21$

q) $(\underline{6} \times 9) - 6 = 48$

r) $(7 \times 6) + \underline{13} = 55$

s) $(\underline{6} \times 6) - 7 = 29$

t) $(7 \times 9) + \underline{9} = 72$

E556

Repaso

CONJUNTO I

Parte A

1. Utilizando uno de los símbolos $>$, $=$, o $<$, haz de cada uno de los siguientes un enunciado cierto:

   a) $\frac{2}{3}$ pie $\underline{<}$ 12 pulgadas

   b) 24 pulgadas $\underline{>}$ $\frac{1}{2}$ yarda

   c) 1 pinta $\underline{=}$ $\frac{1}{2}$ cuartillo

   d) $\frac{1}{2}$ hora $\underline{=}$ 30 minutos

   e) $\frac{2}{3}$ yarda $\underline{=}$ 2 pies

   f) 12 pulgadas $\underline{>}$ $\frac{1}{4}$ yardas

   g) $\frac{1}{2}$ cuartillo $\underline{<}$ 2 pintas

   h) 15 minutos $\underline{=}$ $\frac{1}{4}$ hora

   i) 4 pies $\underline{<}$ $1\frac{1}{2}$ yardas

   j) 9 pulgadas $\underline{<}$ $\frac{1}{3}$ yarda

2. Dispón en orden creciente los siguientes números:

   a) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{6}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}$ $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{6}{3}, \frac{8}{3})$

   b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}$ $(\frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

   c) $\frac{3}{6}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{12}$ $(\frac{3}{12}, \frac{3}{8}, \frac{3}{6}, \frac{3}{4}, \frac{3}{3})$

   d) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{8}, \frac{4}{4}, \frac{1}{8}$ $(\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4})$

   e) $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{7}{5}$ $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5})$

   f) 1 pie, 6 pulgadas, $\frac{3}{4}$ pie, $\frac{1}{4}$ pie ($\frac{1}{4}$ pie, 6 pulgadas, $\frac{3}{4}$ pie, 1 pie)

   g) 45 min., $\frac{1}{2}$ hora, 60 min., $\frac{1}{4}$ hora ($\frac{1}{4}$ hora, $\frac{1}{2}$ hora, 45 min., 60 min.)

   h) 1 ton., 1 libra, $\frac{1}{2}$ libra, 1 onza (1 onza, $\frac{1}{2}$ libra, 1 libra, 1 ton.)

   i) 1 pinta, 1 cuartillo, 1 taza, 1 galón (1 taza, 1 pinta, 1 cuartillo, 1 galón)

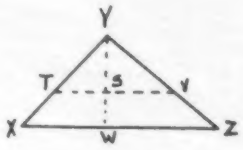
   j) $\frac{1}{3}$ pulgada, $\frac{2}{3}$ pulgada, $\frac{5}{6}$ pulgada, $\frac{1}{6}$ pulgada ($\frac{1}{6}$ pulgada, $\frac{1}{3}$ pulgada $\frac{2}{3}$ pulgada, $\frac{5}{6}$ pulgada)

3. N = {Los puntos A, B}
¿Cuál es el número mayor de segmentos de recta que pueden tener extremos en el conjunto N? (Uno)
Indícalo(s). ($\overline{AB}$)

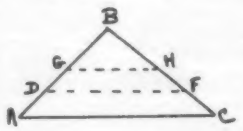
4. M = {Los puntos C, D, E}
¿Cuál es el número mayor de segmentos de recta que pueden tener extremos en el conjunto M? (Tres)
Indícalo(s). ($\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EC}$)

5. R = {Los puntos G, F, H, I}
¿Cuál es el número mayor de segmentos de recta que pueden tener extremos en el conjunto R? (Seis)
Indícalo(s). ($\overline{GF}$, $\overline{GH}$, $\overline{GI}$, $\overline{HI}$, $\overline{HF}$, $\overline{FI}$)

6. Dibuja dos segmentos de recta para obtener del $\triangle XYZ$ tres cuadriláteros y cinco nuevos triángulos.
($\triangle TVY$, $\triangle TSY$, $\triangle VSY$, $\triangle XYW$, $\triangle ZYW$, $\square XTVZ$, $\square XTSW$, $\square WSVZ$)



7. Dibuja dos segmentos de recta para obtener del $\triangle ABC$ dos nuevos triángulos y tres cuadriláteros.
($\triangle DBF$, $\triangle BGH$, $\square DFCA$, $\square AGHC$, $\square DGHF$)



8. $4 < 5 < 8$ significa que 4 es menor que 5 y 5 es menor que 8. Escribe los siguientes enunciados en forma más abreviada:

a) $32 < 34$ y $34 < 40$ ($32 < 34 < 40$) (Hay varias respuestas posibles.)

b) $\frac{1}{4} < \frac{2}{4}$ y $\frac{2}{4} < \frac{3}{4}$ ($\frac{1}{4} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4}$)

c) $112 < 115$ y $115 < 117$ ($112 < 115 < 117$)

d) $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ y $\frac{3}{4} < \frac{7}{8}$ ($\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8}$)

9. Halla el número que n representa en los siguientes enunciados:

a) $14 < n < 16$ $(n = 15)$

b) $\frac{1}{3} < n < \frac{3}{3}$ $(n = \frac{2}{3})$

c) $786 < n < 788$ $(n = 787)$

d) $\frac{3}{8} < n < \frac{5}{8}$ $(n = \frac{4}{8}$ ó $\frac{1}{2})$

e) $9 < n < \frac{20}{2}$ $(n = \frac{19}{2}$ ó $9\frac{1}{2})$

f) $\frac{1}{2} < n < 1\frac{1}{2}$ $(n = \frac{2}{2}$ ó $1)$

(Hay varias respuestas posibles.)

10. ¿Qué representan cada una de las figuras descritas a continuación?

a) Un modelo que tiene por caras 3 regiones rectangulares y 2 regiones triangulars. (un prisma triangular)

b) Un modelo que tiene por caras cuatro regiones triangulares. (una pirámide)

c) Un modelo que tiene por caras seis regiones triangulares. (un prisma rectangular)

d) Un modelo que tiene por caras una región rectangular y dos regiones circulares. (un cilindro)

e) Un modelo cuyos bordes forman ángulos rectos solamente. (un prisma rectangular)

f) Un modelo que tiene por caras una región circular y una región semicircular. (un cono)

11. En los siguientes enunciados, se comparan las longitudes de segmentos de rectas; complétalos para que resulten ciertos: (Los ejercicios a) y b) se presentan como ejemplos.)

a) 4 pies son 2 veces tan largos como 2 pies.

b) 2 pies son $\frac{1}{2}$ tan largos como 4 pies.

c) 9 pulgadas son 3 veces tan largas como 3 pulgadas.

d) 3 pulgadas son $\frac{1}{3}$ tan largas como 9 pulgadas.

e) 12 yardas son 2 veces tan largas como 6 yardas.

f) 5 yardas son $\frac{1}{2}$ tan largas como 12 yardas.

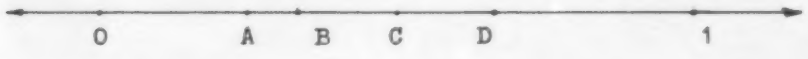
g) 15 minutos son $\frac{1}{3}$ tan largos como 45 minutos.

h) 45 minutos son 3 veces tan largos como 15 minutos.

12. Con cada una de las cantidades descritas en la columna II, aparea la unidad normalizada de medida apropiada de la columna I.

Columna I		Columna II
a) taza	j	Longitud de tu lápiz
b) pies	f	Botella de leche
c) segundos	i	Distancia entre ciudades
d) horas	g	Longitud de un campo de fútbol
e) días	c	Tiempo para una carrera
f) cuartillo	h	Hora de recreo
g) yardas	e	Tiempo para viajar por mar
h) minutos	d	Tiempo para dormir
i) millas	b	Altura de un árbol
j) pulgadas	a	Azúcar para una receta

13. Escribe cuatro fracciones diferentes para nombrar a cada uno de los puntos marcados en la recta numérica siguiente:



(A $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{4}{16}, \frac{8}{32}$; B $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}$; C $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$;
D $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}$) (Hay varias respuestas posibles.)

14. Halla el perímetro de los siguientes:
   a) Un polígono con lados cuyas medidas en pulgadas son 16, 28 y 32. (Perímetro 76 pulgadas)
   b) Un triángulo equilátero uno de cuyos lados tiene medida en pies de 14. (Perímetro 42 pies)
   c) Un polígono con 6 lados congruentes; la medida en centímetros de un lado es 35. (Perímetro 210 centímetros)
   d) Un cuadrado, un lado del cual tiene medida en metros de 7. (Perímetro 28 metros)
   e) Un polígono con 2 lados cuyas medidas suman 8 yardas y 3 lados cuyas medidas suman 15 yardas. (Perímetro 23 yardas)

E560

Parte B

Escribe un enunciado matemático (o dos enunciados, si es necesario) para cada problema y resuélvelos. Da la respuesta mediante una oración completa.

1. La familia Duval gasta 8 huevos para el desayuno. ¿Qué parte de una docena queda? ($12 - 8 = t$, $t = 4$, $4 \div 12 = n$, $n = \frac{4}{12}$ ó $\frac{1}{3}$. Queda $\frac{4}{12}$ de una docena de huevos.)

2. Ernesto gana 75 centavos el lunes, 50 centavos el miércoles y 75 centavos el viernes, cortando céspedes. ¿Cuánto ganará en seis semanas? [$(75 + 50 + 75) \times 6 = n$ o $75 + 50 + 75 = c$, $c = 200$, $200 \times 6 = n$, $n = 1200$. Ganará \$12.00.]

3. El autobús escolar recorre 7 millas con un galón de gasolina. Cada semana, recorre un promedio de 882 millas. ¿Cuánta gasolina consumirá en cuatro semanas? [$(882 \div 7) \times 4 = n$ o, también, $882 \div 7 = g$, $g = 126$, $n = 4 \times g$, $n = 4 \times 126 = 504$. Consumirá 504 galones de gasolina.]

4. Sara llamó a la tienda de comestibles para ordenar alimento por 1 mes para su caballo. Compró 5 pacas de heno a \$1.75 la paca y 100 libras de avena por \$5.30. ¿Cuánto será la factura por el alimento del mes? [$(5 \times 175 + 530 = n$ o $5 \times 175 = h$, $h + 530 = n$, $n = 1405$. La factura será \$14.05.]

5. La pelota que bateó Tomás cayó a una distancia de 135 pies y la que bateó Raúl cayó 25 pies más lejos que la de Tomás. ¿A qué distancia cayó la pelota que bateó Raúl? ($135 + 25 = n$, $n = 160$. La pelota que bateó Raúl cayó a una distancia de 160 pies.)

6. Hay 347 millas aéreas de San Francisco a Los Angeles, 1240 millas aéreas de Los Angeles a Dallas, 443 millas aéreas de Dallas a Nueva Orleans y 669 millas aéreas de Nueva Orleans a Miami. Por esta ruta, ¿cuántas millas aéreas hay de San Francisco a Miami? ($347 + 1240 + 443 + 669 = n$, $n = 2699$. De San Francisco a Miami, hay 2699 millas aéreas por esta ruta.)

7. La enfermera encontró que Juana medía 4 pies 4 pulgadas de alto, que Linda medía 4 pies 11 pulgadas de alto, y que María medía 4 pies 9 pulgadas de alto. ¿Cuánto más alta que Juana es Linda? (4 pies 11 pulgadas - 4 pies 4 pulgadas = n, n = 7 pulgadas. Linda mide 7 pulgadas más que Juana.)

8. En el salto a lo ancho, el mejor salto de Pepe fue de 5 pies 3 pulgadas, mientras que el mejor salto de Luis fue de 6 pies 2 pulgadas. ¿Cuánto mejor fue el salto de Luis que el de Pepe? (6 pies 2 pulgadas - 5 pies 3 pulgadas = n, n = 11 pulgadas. El salto de Luis fue 11 pulgadas más largo.)

9. Para su cumpleaños, Tomás recibió un nuevo bate de béisbol, que tiene 24 pulgadas de largo. ¿Qué parte de una yarda es la longitud del bate? ($\frac{24}{36}$ = n, n = $\frac{2}{3}$. La longitud del bate es $\frac{2}{3}$ de una yarda.)

10. José entrega 56 periódicos por día. ¿Cuántos periódicos entrega en 28 días? (56 x 28 = t, t = 1,568. Entrega 1,568 periódicos en 28 días.)

11. Susana compró 2 docenas de galletitas por 30 centavos la docena y un bizcocho por 80 centavos. ¿Cuánto pagó al dependiente? (30 x 2 = a, 30 ÷ 30 = a, a = 60. 60 + 80 = c, c = 40. Paga $ 1.40 al dependiente.)

PROBLEMAS DIFICILES

1. Hay una tabla de 30 pulgadas que se ha de cortar en 5 pedazos, cada uno de 6 pulgadas de largo. Se necesitan cinco minutos para hacer cada corte. ¿Cuántos minutos se emplearán en cortar los 5 pedazos? (4 x 5 = 20)

2. Un gusano estaba subiendo a un árbol de 5 pies de alto. Subía tres pulgadas cada día y bajaba dos pulgadas cada noche. ¿Cuántos días empleó para llegar a la cima? [(5 x 12) - 2 = n, n = 58. Empleó 58 días.]

La edición preliminar de este volumen se hizo en una sesión celebrada en la Universidad de Stanford durante el verano de 1960, y se basó en parte en un bosquejo preparado en Chicago en marzo de 1960. La edición preliminar se revisó en la Universidad de Yale en el verano de 1961. La presente revisión se preparó en la Universidad de Stanford en el verano de 1962, teniendo en cuenta la experiencia en el salón de clase con las dos primeras ediciones durante los años académicos 1960-1962.

He aquí una lista de todos los participantes en la preparación de este volumen:

Truman A. Botts, Universidad de Virginia
James A. Cooley, Universidad de Tennessee
Helen L. Curran, Escuela Glenview, Oakland, California
Helen L. Garstens, Universidad de Maryland
E. Glenadine Gibb, Colegio del Estado de Iowa
Geraldine Green, Escuela Vetal, Detroit, Michigan
William T. Guy, Jr., Universidad de Texas
Leon Haaland, Escuela Kenwood, Minneapolis, Minnesota
Clarence Ethel Hardgrove, Universidad del Norte de Illinois
Royce S. Hargrove, Escuelas públicas de Corpus Christi, Texas
Max Hosier, Colegio del Estado de Iowa
Henry G. Jacob, Universidad de Massachusetts
Leore John, Escuela superior de la Universidad de Chicago
George E. Knoblock, Escuela El Carmelo, Palo Alto, California
William G. Lister, Universidad del Estado de Nueva York
Lelia M. Maneely, Escuela Springer, Los Altos, California
John L. Marks, Colegio San José del Estado
Martha Meek, Escuela elemental Glorietta, Orinda, California
Mary McDermott, Distrito escolar unificado de Mt. Diablo, California
William K. McNabb, Escuela de San Marcos, Dallas, Texas
Frances J. Mettler, Escuela elemental Walter Hays, Palo Alto, California
Leon Rutland, Universidad de Colorado
Irene Sauble, Escuelas públicas de Detroit
Helen Schneider, Escuelas públicas de LaGrange, Illinois
Willa J. Sessions, Escuelas públicas del condado de Hillsborough, Florida
Rose Mary Shea, Escuela Edith C. Baker, Brookline, Mass.
Wesley Thompson, Escuelas públicas de Detroit
Morgan Ward, Instituto de Tecnología de California
Ted Wassam, Escuela Ventura, Palo Alto, California
J. Fred Weaver, Universidad de Boston